

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

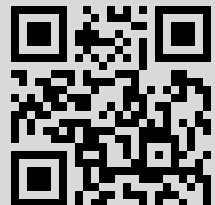
А. П. Котельников, Точки Бурместра, их свойства и построение, *Матем. сб.*, 1927, том 34, номер 3-4, 207–348

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 77.51.89.196

23 февраля 2015 г., 18:37:07



## Точки Бурместра, их свойства и построение.

А. П. Котельников (Москва).

### Введение.

Бурместр в своей работе „Über die Geradföhrung durch das Kurbelgetriebe“<sup>1)</sup> ставит и решает следующую задачу: произвольно заданы пять положений плоской фигуры  $F$ , найти на фигуре такую точку  $A$ , чтобы пять соответствующих ее положений  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  находились на одной окружности. Бурместр показывает, что таких точек существует четыре —  $A, B, C, D$  и что они определяются пересечением двух особого рода (фокальных) циркулярных кривых третьего порядка.

В том случае, когда фигура  $F$  движется непрерывно и заданные пять ее положений бесконечно близки одно к другому, окружности, проходящие через бесконечно близкие положения точек  $A, B, C, D$ , обращаются в круги кривизны, имеющие с траекториями этих точек соприкосновение четвертого порядка.

Прежде чем, однако, эти точки в западной литературе получили название точек Бурместра, начало их изучения было положено П. Л. Чебышевым.

В своих мемуарах<sup>2)</sup> П. Л. Чебышев занимается разысканием параллелограммов (т. е. шарнирных четырехугольников), доставляющих одной из точек  $M$  подвижного звена движение по траектории, которая на протяжении некоторого участка по возможности ближе подходила бы к прямой линии. В том случае, когда этот участок, уменьшаясь, обращается в бесконечно малый элемент траектории, проходящий через пять точек, лежащих на прямой линии, эта последняя становится касательной, имеющей с траекторией соприкосновение четвертого порядка, а точка, описывающая этот элемент, обращается в точку Бурместра, которой соответствует бесконечно большой радиус кривизны. Такую точку я в своей работе называю точкой Чебышева, а тот случай когда она существует — случаем Чебышева.

В мемуарах „О параллелограммах, состоящих из трех каких-либо элементов“<sup>3)</sup> и „О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движе-

1) *Civilingenieur*. 1877. В. 23 S. 227 и. 321; также *Lehrbuch der Kinematik*, 1888, p. 622.

2) П. Л. Чебышев. Сочинения. Т. II. 1) „Об одном механизме“. 1868, стр. 51 — 57. 2) „О простейших сочленениях“, стр. 273 — 282. 3) „О параллелограммах, состоящих из трех элементов и симметрических около одной оси“. 1879, стр. 285 — 297. 4) „О простейших параллелограммах симметрических около одной оси“, стр. 709 — 714.

3) Сочинения. Т. II, 1880, стр. 301 — 331. Также „Теорема относительно кривой Уатта“. 1881, стр. 715.

ние с точностью до величин четвертой степени<sup>1)</sup> П. Л. Чебышев ставит несколько другую задачу: найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данный треугольник, двигаясь двумя вершинами  $A$  и  $A_1$  по кругам, третьей вершиной  $M$  описывал кривую, имеющую в некоторой точке  $K$  соприкосновение с прямой 4 или 5 порядка. Решив эту задачу, П. Л. Чебышев показывает, что на стороне  $AA_1$  существует точка  $A_2$ , траектория которой в некоторой точке  $L$  имеет с окружностью соприкосновение 4 порядка и что точки  $M$  и  $A_2$  одновременно проходят через точки  $K$  и  $L$ . В этот момент точки  $A, A_1, A_2 \equiv L, M \equiv K$  будут четырьмя точками Бурместра, и таким образом теорему—в том случае, когда одной из точек Бурместра соответствует бесконечно большой радиус кривизны, существуют еще три точки Бурместра, лежащие на одной прямой—надо считать принадлежащей П. Л. Чебышеву.

Для решения задачи Чебышева в простейшем случае симметрического около оси параллелограмма Н. Е. Жуковский в небольшой статье<sup>2)</sup> определяет для подвижного звена центры ускорений первых четырех порядков и затем при их помощи очень просто находит положение точки Чебышева. Полученные им при этом формулы, определяющие размеры параллелограмма, совпадают с формулами Чебышева.

При помощи геометрических построений Р. Мюллер выводит уравнения тех кривых, пересечением которых определяется положение точек Бурместра, и основное уравнение 4 степени, которым определяются тангенсы их полярных углов<sup>3)</sup>. Этими уравнениями затем он пользуется для вывода некоторых свойств точек Бурместра, а также для получения формул, на которые опираются решения различных задач<sup>4)</sup>. Р. Мюллер подробно останавливается на построениях точек Бурместра как в общем случае<sup>5)</sup>, так и для разнообразных частных случаев<sup>6)</sup>. Его внимание привлекает главным образом та точка Бурместра, которой соответствует бесконечно-большой радиус кривизны, т. е., по нашей терминологии,—точка Чебышева, в особенности когда она совпадает с одной из трех точек Бурместра и лежит с двумя другими на одной прямой. Для этого случая Р. Мюллер изучает ее траекторию<sup>7)</sup>.

В своей работе для вывода основных уравнений я употребляю прием отличный от метода Р. Мюллера. Я вывожу сначала формулы для ускорений различных

1) П. Л. Чебышев. Сочинения. Т. II. 1882, стр. 359 — 374.

2) Н. Е. Жуковский. „Приложение теории центров ускорений высших порядков к направляющему механизму Чебышева“. Журн. русского ф.-х. общества. 1883. Т. XV. Физический отдел, стр. 135 — 141.

3) R. Müller. Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen“. Z. f. M. u. Ph. 1892. B. 37. S. 129 — 150.

4) „Zur Lehre von der Momentanbewegung eines starren ebenen Systems: Eine Eigenschaft der Burmesterschen Punkte“. Z. f. M. u. Ph. 1902. B. 48. S. 220 — 223.

5) Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck“. Erste Mitteilung. Z. f. M. u. Ph. 1892. B. 37. S. 213 — 216.

6) „Construction der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck“. Zweite Mitteilung. Z. f. M. u. Ph. 1893. B. 38. S. 129.

„Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks“. Z. f. M. u. Ph. 1897. B. 42, S. 247 — 271.

„Über die angenäherte Geradföhrung mit sechspunktig berührender Tangente“. Z. f. M. u. Ph. 1898. B. 43, S. 36—40.

7) „Die Koppelcurve mit sechspunktig berührender Tangente“. Z. f. M. u. Ph. 1901. B. 46, S. 330 — 342.

„Zur Theorie der doppelt gestreckten Koppelcurve: die Krümmung der Curve in dem Punkte mit sechspunktig berührender Tangente“. Z. f. M. u. Ph. 1902. B. 48, S. 208 — 219.

порядков точки движущейся плоскости. При помощи их я нахожу условия для того, чтобы окружность имела с траекторией точки соприкосновение 2, 3 и т. д. порядков, и из них легко получаю основные уравнения, определяющие положения точек Бурместра. Выводу этих формул и уравнений посвящаются начала II и III глав.

Вторая половина главы II не имеет непосредственного отношения к главной теме моей работы. В ней я доказываю некоторые свойства ускорений первого порядка и получаю формулу для радиуса кривизны огибающей при помощи приема, который, как мне кажется, несколько отличен от обычных способов вывода этой формулы.

Во второй половине главы III я излагаю некоторые основные наиболее простые свойства точек Бурместра, непосредственно вытекающие из основных уравнений.

Для более детального и полного их изучения и для решения различных задач я пользуюсь следующим методом. Точки Бурместра лежат на некоторой строфоиде  $S$ , а соответствующие им центры кривизны—на строфоиде  $\Sigma$ . Строфоиду мы можем преобразовать в более простые линии. Особенно удобно воспользоваться квадратичными преобразованиями, при которых обе строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  переходят в одну и ту же окружность  $D$  так, что точка строфоиды  $S$  и соответствующий ей центр кривизны, лежащий на строфоиде  $\Sigma$ , преобразуются в одну и ту же точку окружности  $D$ . Тогда фигура, образованная точками Бурместра на строфоиде  $S$ , и фигура, образованная соответствующими им центрами кривизны на строфоиде  $\Sigma$ , переходят в одну и ту же фигуру на окружности  $D$ , и вместо того, чтобы изучать первые две, мы можем изучать последнюю. Выгода такого метода очевидна, ибо он позволяет нам иметь дело с одной фигурой на окружности, вместо двух фигур, расположенных на более сложных кривых—строфоидах. Изложению его и вытекающих из него следствий и посвящается главная часть моей работы—глава IV.

В главе V я рассматриваю случаи, когда одна из строфоид  $S$ ,  $\Sigma$  или обе вырождаются в совокупности прямой и окружности или равносторонней гиперболы.

Так как при изучении точек Бурместра большую роль играет строфоида, то в главе I я излагаю некоторые ее свойства, причем я уделяю особенное внимание свойствам трех точек, в которых прямая пересекается со строфоидой, и их изображений на окружности.

## Г Л А В А I.

§ 1. Под углом, обозначенным тремя буквами  $AOB$ , мы всегда будем подразумевать угол, на который надо повернуть безграничную в обе стороны прямую, проходящую через точку  $O$ , для того чтобы эта прямая, совпадая вначале с первой стороной  $OA$ , после поворота совпала со второй стороной  $OB$ . Когда одновременно приходится рассматривать два или несколько углов, то углы, описанные вращающимся лучом при движении его в одну сторону, будем считать положительным, а в другую сторону—отрицательным.

При этих условиях:

1. Угол будет определяться только до  $\pi$  или до  $180^\circ$ , так что углы сравнимые по модулю  $\pi$  или  $180^\circ$  считаются равными.

2.  $\angle AOB = -\angle BOA$ .

3. Во всяком треугольнике  $ABC$  имеем  $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180^\circ = 0$ .

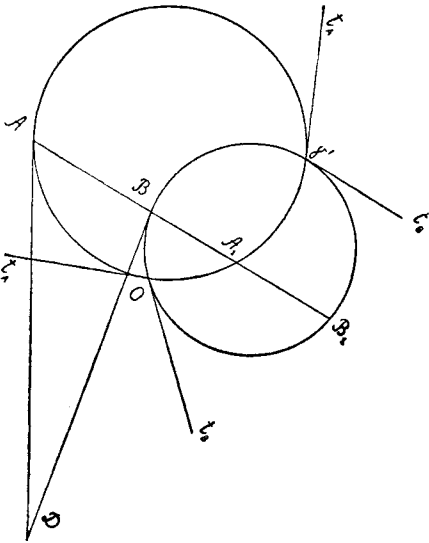
4. Если четыре точки  $A, B, C, D$  как угодно расположены на плоскости, то  $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 180^\circ = 0$ .

5. Если четыре точки  $A, B, C, D$  лежат на окружности, то  $\angle ABC = \angle ADC$ , независимо от того, разделяются ли точки  $A$  и  $C$  точками  $B$  и  $D$ , или нет. Обратное, если  $\angle ABC = \angle ABD$ , то четыре точки  $A, B, C, D$  лежат на окружности.

6. Если углы  $\angle AOB$  и  $\angle A_1OB$  смежные, то  $\angle AOB = \angle A_1OB$ ,  $\angle BOA = \angle BOA_1$ .

7.  $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ .

Пусть две окружности пересекаются в двух точках  $O$  и  $\gamma'$ . Обозначим через  $t_A$  и  $t_B$  две точки, находящиеся на касательных, проведенных к окружностям или через точку  $O$  или через точку  $\gamma'$ . Произвольная прямая встречается с окружностью в четырех точках: с первой—в точках  $A$  и  $A_1$ , со второй—в точках  $B$  и  $B_1$ . В точках  $A$  и  $B$  к окружностям проведены касательные  $AD$  и  $BD$ , пересекающиеся в точке  $D$  (фиг. 1).



Фиг. 1.

**Лемма I.** Угол  $\angle AOB = \angle B_1\gamma'A_1$  или угол  $\angle A_1OB_1 = \angle B\gamma'A$ .

Действительно,  $\angle AOB + \angle OBA + \angle BAO = 0$ ; отсюда  $\angle AOB = \angle ABO + \angle OAB = \angle B_1BO + \angle OAA_1 = \angle B_1\gamma'O + \angle O\gamma'A_1 = \angle B_1\gamma'A_1$ .

**Лемма II.** Сумма  $\angle AOB + \angle A\gamma'B = \angle ADB$ .

Действительно,  $\angle ADB + \angle DBA + \angle BAD = 0$ ; отсюда  $\angle ADB = \angle ABD + \angle DAB = \angle B_1BD + \angle DAA_1 = \angle B_1OB + \angle OAA_1 = \angle B_1OA_1 + \angle A_1OB + \angle AOB + \angle BOA_1 = \angle B_1OA_1 + \angle AOB = \angle AOB + \angle A\gamma'B$  (Лемма I).

**Следствие.** Если секущая проходит через точку  $\gamma'$ , то  $\angle AOB = \angle ADB$  и точки  $A, O, B, D$  лежат на одной окружности.

В самом деле, в этом случае  $\angle A\gamma'B = 0$ , и лемма приводит к равенству  $\angle AOB = \angle ADB$ . Обратное положение тоже справедливо: если точки  $A, O, B, D$  лежат на одной окружности, то секущая проходит через точку  $\gamma'$ . Ибо

в этом случае  $\angle AOB = \angle ADB$  и  $\angle A\gamma'B = 0$ .

**Лемма III.** Сумма  $\angle AOB + \angle B\gamma'A$  есть величина постоянная, не зависящая от положения секущей, и равна углу  $\angle t_A O t_B = \angle t_B \gamma' t_A$ .

Действительно,  $\angle AOB + \angle B\gamma'A = \angle AO\gamma' + \angle \gamma'OB + \angle B\gamma'O + \angle O\gamma'A = \angle AA_1\gamma' + \angle \gamma'B_1B + \angle BB_1O + \angle OA_1A = \angle OA_1\gamma' + \angle \gamma'B_1O = \angle t_A O \gamma' + \angle \gamma' O t_B = \angle t_A O t_B = \angle t_B \gamma' t_A$ .

**Следствие 1.** Отрезок  $AB$  прямой, проведенный через одну из двух точек пересечения окружностей,  $\gamma'$ , и заключенный между этими окружностями, виден из другой точки пересечения,  $O$ , под углом  $\angle AOB = \angle t_A O t_B$  между касательными к окружностям в точке  $O$ .

Действительно, если секущая проходит через точку  $\gamma'$ , то  $\angle A\gamma'B = 0$  и  $\angle AOB = \angle t_A O t_B$ .

**Следствие 2.** Отрезок  $A\gamma'$  касательной, проведенной через одну из двух точек пересечения окружностей,  $\gamma'$ , к одной из этих окружностей и заключенный внутри другой окружности, виден из другой точки пересечения окружностей,  $O$ , под углом  $\angle AO\gamma' = \angle t_A O t_B$ .

В самом деле, если секущая, которая проходит через  $\gamma'$ , будет касаться окружности  $OB$ , то точка  $B$  совпадет с точкой  $\gamma'$  и  $AO\gamma' = t_A O t_B$ .

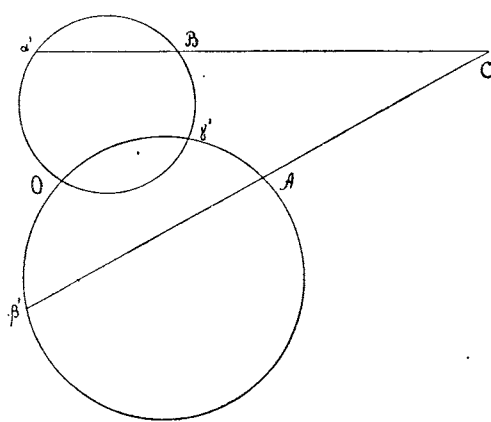
Пусть две окружности пересекаются в точках  $O$  и  $\gamma'$ . Из точки  $C$  проводим две прямые  $Ca'B$  и  $C\beta'A$ , из которых первая пересекает одну из окружностей в точках  $a'$  и  $B$ , а вторая — другую окружность в точках  $\beta'$  и  $A$  (фиг. 2).

**Лемма IV.** Сумма  $a'O\beta' + B\gamma'A + ACB = 0$  или сумма  $a'\gamma'\beta' + BOA + ACB = 0$ .

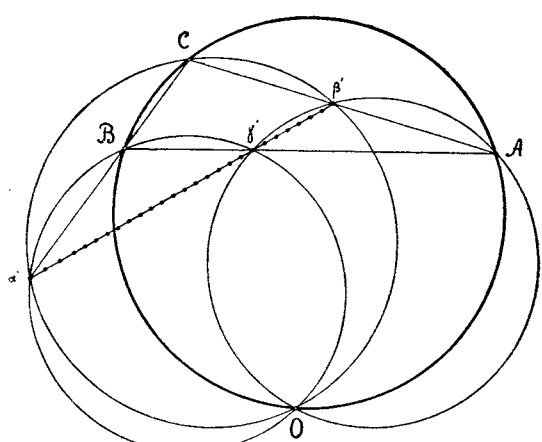
Действительно  $0 = a'O\beta' + O\beta'C + \beta'Ca' + Ca'O = a'O\beta' + O\beta'A + ACB + Ba'O = a'O\beta' + O\gamma'A + ACB + B\gamma'O = a'O\beta' + B\gamma'A + ACB$ . Так же доказывается и второе равенство.

**Следствие 1.** Если на трех сторонах треугольника  $ABC$  или на их продолжениях мы возьмем три точки  $a', \beta', \gamma'$ :  $a'$  — на стороне  $BC$ ,  $\beta'$  — на стороне  $CA$  и  $\gamma'$  — на стороне  $AB$ , то три окружности  $a'\beta'C$ ,  $\beta'\gamma'A$ ,  $\gamma'a'B$  пройдут через одну и ту-же точку (фиг. 3).

В самом деле, проведем две окружности  $\beta'\gamma'A$  и  $\gamma'a'B$ . Кроме точки  $\gamma'$  они будут иметь еще одну общую точку  $O$ . По отношению к этим двум окружностям прямые  $Ca'B$  и  $C\beta'A$  будут секущими, проходящими через точку  $C$ . На основании леммы  $a'O\beta' + B\gamma'A + ACB = 0$ ; но точка  $\gamma'$  лежит на стороне  $AB$  и  $B\gamma'A = 0$ . Следовательно,  $a'O\beta' + ACB = a'O\beta' + \beta'Ca' = 0$  или  $a'O\beta' = a'Cb'$ , и окружность, проведенная через точки  $a'\beta'C$ , пройдет и через точку  $O$ .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

**Следствие 2.** Если точки  $a', \beta', \gamma'$ , взятые на трех сторонах треугольника, лежат на одной прямой, то точка  $O$  пересечения окружностей  $A\beta'\gamma'$ ,  $B\gamma'a'$ ,  $Ca'\beta'$  лежит на окружности  $ABC$ .

Действительно, так как в этом случае  $a'\gamma'\beta' = 0$ , то из равенства  $a'\gamma'\beta' + BOA + ACB = 0$  следует, что  $BOA + ACB = 0$  или  $ACB = AOB$ : точки  $A, B, C$  и  $O$  лежат на одной окружности.

**Следствие 3.** Если точки  $a', \beta', \gamma'$  взяты на трех сторонах треугольника  $ABC$  и точка  $O$  пересечения окружностей  $A\beta'\gamma'$ ,  $B\gamma'a'$ ,  $Ca'\beta'$  лежит на окружности  $ABC$ , то точки  $a', \beta', \gamma'$  лежат на одной прямой.

Действительно, в этом случае  $BOA + ACB = 0$  и из равенства  $a'\gamma'\beta' + BOA + ACB = 0$  имеем  $a'\gamma'\beta' = 0$ , откуда следует, что  $a', \beta', \gamma'$  лежат на одной прямой линии.

**Теорема I.** Проведем через точку  $O$  пересечения двух окружностей касательные к ним и секущую, встречающую окружности в точках  $A$  и  $B$ . Если через точку  $A$  первой окружности провести прямую, параллельную касательной ко второй, и через точку  $B$  второй окружности — прямую, параллельную касательной к первой, то эти две прямые пересекутся на радикальной оси окружностей.

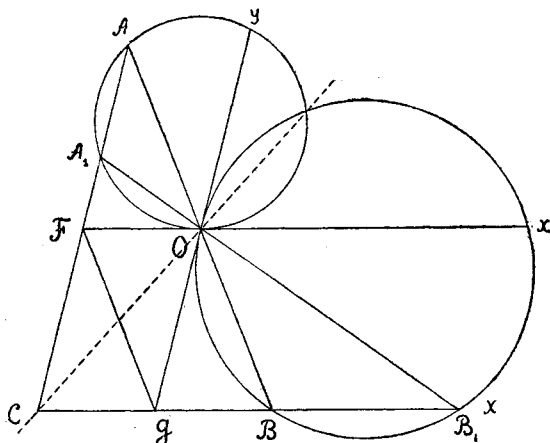
Пусть прямая, проведенная через точку  $A$  параллельно касательной  $GOy$ , пересекает окружность в точке  $A_1$ , а прямая, проведенная через точку  $B$  параллельно касательной  $FOx$ , встречает окружность в точке  $B_1$  и первую прямую в точке  $C$ . Докажем сначала, что точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на одной прямой с точкой  $O$  (фиг. 4).

Углы  $FOA_1$  и  $OAA_1$  равны, ибо оба измеряются половиной дуги  $OA_1$ . Угол  $OAA_1$  равен углу  $AOy$ , ибо прямые  $AA_1C$  и  $yOG$  параллельны. Углы  $AOy$  и  $BOG$  равны как вертикальные. Углы  $BOG$  и  $BB_1O$  равны, ибо оба измеряются половиной дуги  $OB$ . Углы  $BB_1O$  и  $xOB_1$  равны, ибо прямые  $B_1BC$  и  $xOF$  параллельны. Итак  $FOA_1 = xOB_1$  и, следовательно, точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на одной прямой с точкой  $O$ .

Вследствие равенства углов  $FAO$  и  $GB_1O$  треугольники  $ABC$  и  $B_1A_1C$  подобны, и мы имеем равенство  $CA \cdot CA_1 = CB \cdot CB_1$ . Таким образом, степени точки  $C$  по отношению к обеим окружностям равны, и точка  $C$  лежит на радикальной оси окружностей, что и требовалось доказать.

**Теорема II.** Для того чтобы отрезок прямой, проведенной через точку  $O$  пересечения двух окружностей, и заключенный между окружностями делился точкой  $O$  пополам, необходимо и достаточно, чтобы прямая была параллельна диагонали параллелограмма, построенного на касательных к окружностям в точке  $O$ , другая диагональ которого совпадает с радикальной осью.

В самом деле, пусть прямая, проведенная через точку  $O$ , пересекает окружности в точках  $A$  и  $B$



Фиг. 4.

(фиг. 4). Проведя через  $A$  прямую  $AFC$ , параллельную касательной  $Oy$  ко второй окружности, и через  $B$ —прямую  $BGC$ , параллельную касательной  $Ox$  к первой, мы получим параллелограмм  $OF CG$ , вершина которого  $C$ , на основании предыдущей теоремы, будет лежать на радикальной оси  $OR$ . Если теперь предположим, что  $OA = OB$ , то вследствие параллельности линий  $AC$  и  $OG$  и линий  $BC$  и  $OF$  мы будем иметь  $CG = GB$  и  $CF = FA$ . Из этих равенств следует, что  $FG$  будет параллельна  $AB$ .

Обратно, если  $AB$  параллельна  $FG$ , то  $OA = FG = OB$ .

**Теорема III.** Отражения окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , в сторонах его проходят через точку пересечения высот.

Пусть  $U$  есть точка пересечения высот  $BUEM$ ,  $AUDL$ ,  $CUFN$  треугольника  $ABC$ . Вследствие перпендикулярности линий  $BC$  и  $AD$ ,  $AC$  и  $BE$ , углы  $DAC$  и  $CBE$ , а следовательно и дуги  $LC$  и  $CM$  равны. Поэтому равны и углы  $LBC$  и  $CBM$ , и точка  $U$ , находящаяся на одном перпендикуляре к стороне  $BC$  с точкой  $L$  будет отражением этой последней в стороне  $BC$ . Так же докажем, что точка  $U$  будет отражением точек  $M$  и  $N$  в сторонах  $CA$  и  $AB$ .

Отсюда следует, что отражения окружности  $ABC$  в сторонах треугольника  $ABC$  все пройдут через точку  $U$ .

**Теорема IV.** Отражения какой-нибудь точки окружности, описанной около

треугольника  $ABC$ , в сторонах треугольника лежат на прямой, проходящей через точку пересечения высот.

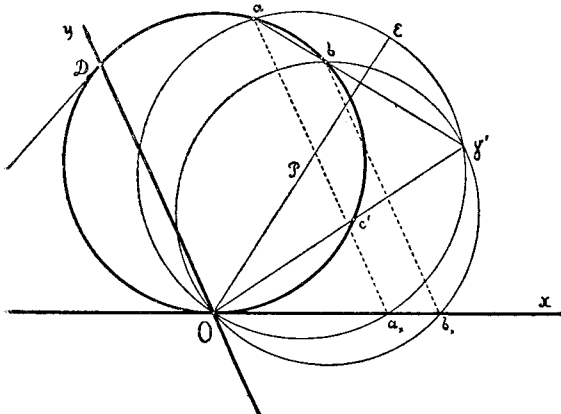
Пусть  $P, Q, R$  (фиг. 5)—отражения точки  $O$  окружности  $ABC$  в сторонах треугольника  $ABC$ . Так как точка  $O$  лежит на окружности  $ABC$ , то точки  $P, Q, R$  будут лежать на отражениях окружности  $ABC$  в тех же сторонах, отражениях, которые на основании предыдущей теоремы проходят все через точку  $U$  пересечения высот. Мы имеем поэтому ряд равенств

$$RUA = RBA = ABO = \\ = ACO = QCA = QUA.$$

Вследствие равенства углов  $RUA$  и  $QUA$  точки  $R, Q, U$  лежат на одной прямой. Так же докажем, что и точки  $R, P, U$  лежат на одной прямой.

**Следствие.** Середины  $P_1, Q_1, R_1$  отрезков  $OP, OQ, OR$  суть проекции  $O$  на сторонах треугольника  $ABC$ . Так как  $P, Q, R, U$  лежат на одной прямой, то  $P_1, Q_1, R_1$  лежат также на одной прямой, называемой линией Симпсона и проходящей через середину отрезка  $OU$ .

§ 2. Возьмем произвольную окружность  $D$  (фиг. 6). Через ее точку  $O$  проведем касательную  $Ox$  и секущую  $Oy$ . Эту последнюю будем называть основной линией, а вторую точку ее пересечения (обозначим ее также буквой  $D$ )—основной точкой. Угол между осями  $Ox$  и  $Oy$  обозначим через  $\varphi$ . Прямые, проведенные через точку  $O$ , будем называть лучами, а точки их пересечения с окружностью  $D$ —концами лучей. Окружностью, построенной на луче  $Oa$ , мы будем называть окружность, которая проходит через  $O$ , через конец луча  $Oa$ , точку  $a$ , и касается прямой  $Da$ , соединяющей основную точку  $D$  с концом луча. Центр окружности  $Oa$  обозначим через  $P$ .



Фиг. 6.

Угол между осями  $Ox$  и  $Oy$  обозначим через  $\varphi$ . Прямые, проведенные через точку  $O$ , будем называть лучами, а точки их пересечения с окружностью  $D$ —концами лучей. Окружностью, построенной на луче  $Oa$ , мы будем называть окружность, которая проходит через  $O$ , через конец луча  $Oa$ , точку  $a$ , и касается прямой  $Da$ , соединяющей основную точку  $D$  с концом луча. Центр окружности  $Oa$  обозначим через  $P$ .

**Теорема 1.** 1. Угол между

лучом  $Oa$  и прямой  $Da$  равен углу  $\varphi$ :  $OaD = \varphi$ .

2. Угол между лучом  $Oa$  и диаметром окружности  $Oa$  на нем построенной равен  $90^\circ - \varphi$ :  $aOP = 90^\circ - \varphi$ .

3. Пусть  $a_x$  есть точка пересечения окружности  $Oa$  с осью  $x$ ; прямая  $aa_x$  параллельна оси  $Oy$ .



Доказательство (фиг. 6).

1. Углы  $OaD$  и  $xOy = \vartheta$  оба измеряются половиной дуги  $OD$  и, следовательно, равны между собой.

2. Если через  $E$  обозначим конец диаметра  $OP$ , то  $OЕa = OaD = \vartheta$  и, следовательно,  $aOP = 90^\circ - \vartheta$ .

3. Углы  $Oa_x a$  и  $OЕa$  равны, так как они измеряются половиной дуги  $Oa$ . Поэтому  $Oa_x a = OЕa = \vartheta = xOy$ , и прямая  $aa_x$  параллельна оси  $Oy$ .

**Следствие.** Геометрическое место центров окружностей, построенных на различных лучах, есть окружность, подобная  $D$  относительно центра подобия  $O$ , повернутая на угол  $90^\circ - \vartheta$ .

**Теорема II.** По отношению к основной окружности  $D$  на двух лучах  $Oa$  и  $Ob$  построим две окружности  $Oa$  и  $Ob$ , точку их пересечения обозначим через  $\gamma'$ , точки пересечения их с осью  $x$  — через  $a_x, b_x$  и точку пересечения  $O\gamma'$  с основной окружностью — через  $c'$ .

1. Линии  $aa_x$  и  $bb_x$  параллельны оси  $Oy$ .

2. Концы лучей  $a, b$  и точка  $\gamma'$  лежат на одной прямой.

3.  $yOa = bO\gamma'$ ,  $yOb = aO\gamma'$ .

4.  $O\gamma'a = OaD = ObD = \vartheta$ .

5. Прямые  $Dc'$  и  $ab\gamma'$  параллельны.

Доказательство (фиг. 6):

1. Это свойство фигуры доказано в теореме I, 3.

2. Так как по построению  $Da$  и  $Db$  касаются в точках  $a$  и  $b$  окружностей  $Oa$  и  $Ob$  и точка их пересечения  $D$  лежит на одной окружности с точками  $a, b, O$ , то точки  $a, b, \gamma'$  лежат на одной прямой (следствие леммы II, § 1).

3. Окружности  $OD$  и  $Oa$  пересекаются в точках  $O$  и  $a$ ; отрезок касательной  $aD$  виден из точки  $O$  под углом равным углу между касательными к этим окружностям (следствие 2 леммы III, § 1); под тем же углом виден из точки  $O$  и отрезок  $\gamma'b$  (следствие 1 леммы III, § 1). Следовательно углы  $yOa$  и  $bO\gamma'$  равны. Так же можно доказать, что  $yOb = aO\gamma'$ . Луч  $O\gamma'$ , определяемый условием  $yOa = bO\gamma'$  или  $yOb = aO\gamma'$ , мы будем называть осью лучей  $Oa$  и  $Ob$  по отношению к основному лучу, линии  $Oy$ .

4. Углы  $O\gamma'b$  и  $ObD$  измеряются половиной дуги  $Ob$  окружности  $Ob$  и потому равны. Но  $ObD = OaD = \vartheta$  на основании предыдущей теоремы. Следовательно,  $O\gamma'b = OaD = ObD = \vartheta$ .

5. Углы  $Oc'D$  и  $OaD$  равны как измеряющиеся половиной дуги  $OD$ . Но  $OaD = O\gamma'b$ . Следовательно  $Oc'D = O\gamma'b$  и прямые  $Dc'$  и  $ab\gamma'$  параллельны.

**Следствие.** Из 3 и 4 следует, что треугольник  $OaD$  подобен треугольнику  $O\gamma'b$  и треугольник  $ObD$  подобен треугольнику  $O\gamma'a$ .

**Теорема III.** По отношению к основной окружности  $D$  на трех лучах  $Oa, Ob, Oc$  построим три окружности  $Oa, Ob, Oc$ , точки их пересечения обозначим  $\alpha', \beta', \gamma'$ , точки пересечения их с осью  $x$  — через  $a_x, b_x, c_x$  и точки пересечения лучей  $O\alpha', O\beta', O\gamma'$  с основной окружностью — через  $a', b', c'$ .

1.  $aa_x, bb_x, cc_x$  параллельны оси  $Oy$ .

$yOa = bO\gamma' = cO\beta'$ ,  $yOb = cO\alpha' = aO\gamma'$ ,  $yOc = aO\beta' = bO\alpha'$ .

$O\gamma'a = O\beta'c = O\alpha'b = OaD = ObD = OcD = \vartheta$ .

$Da', Db', Dc'$  соответственно параллельны прямым  $bc, ca, ab$ .

2. Точки  $\alpha', \beta', \gamma'$  лежат на одной прямой, которую обозначим через  $\sigma$ , и находятся соответственно на сторонах  $bc, ca, ab$  треугольника  $abc$ .

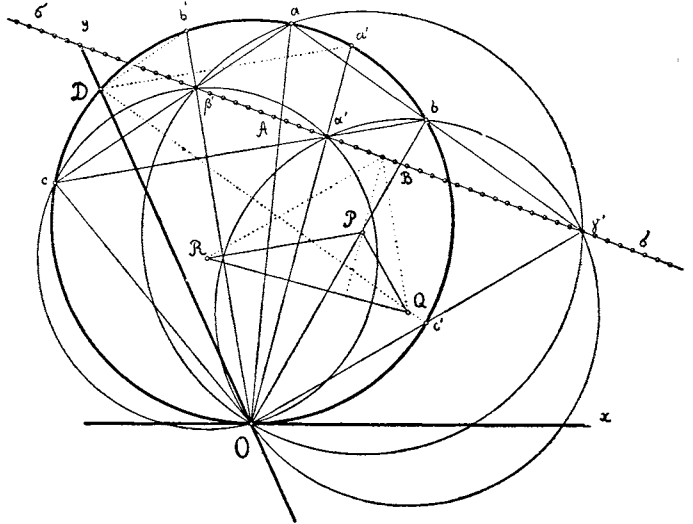
3.  $xOa = O\alpha'\sigma$ ,  $xOb = O\beta'\sigma$ ,  $xOc = O\gamma'\sigma$ .

4.  $xOa' = OAb$ ,  $xOb' = OBb$ ,  $xO\gamma' = OCc$ , причем через  $A, B, C$  обозначены точки пересечения лучей  $Oa, Ob, Oc$  с прямой  $b$ .
5. Треугольники  $Oab, Obc, Oca$  соответственно подобны треугольникам  $O\beta'a', O\gamma'b', Oa'\gamma'$ .
6. Прямые  $aa', bb', cc'$ , параллельны прямой  $b$ .
7. Прямая  $b$  проходит через точку пересечения высот треугольника, вершинами которому служат центры  $P, Q, R$  окружностей  $Oa, Ob, Oc$ .

Доказательство (фиг. 7):

1. Мы убеждаемся в этих свойствах фигуры, комбинируя окружности  $Oa, Ob, Oc$  попарно и применяя к каждой паре предыдущую теорему.

2. Точки  $a', \beta', \gamma'$  лежат на сторонах треугольника  $abc$  (теорема II, 2), и окружности  $Oa, Ob, Oc$  тождественны с окружностями  $a\beta'\gamma', b\gamma'a', c\alpha'\beta'$ . Так как точка  $O$ , через которую эти последние проходят, лежит на одной окружности  $D$  с вершинами треугольника  $abc$ , то на основании следствия 3 леммы IV, § 1, точки  $a', \beta', \gamma'$  лежат на одной прямой линии.



Фиг. 7.

3. Из чертежа мы видим, что  $xOa = ODa =$

$= Oba = O\beta'\gamma' = Oa'b$ . Так же доказываются и другие равенства.

4. Имеем  $xOa' = xOA + AOa'$ ; но  $AOa' = Aa'O + OAa'$ . Следовательно  $xOa = xOA + Aa'O + OAa'$ . По доказанному (3)  $xOa = xOA = Oa'A = -Aa'O$  и потому  $xOa' = OAa'$ . Так же доказываются и другие равенства.

5. Из чертежа видно, что  $O\beta'a' = Oab$  и  $Oa'\beta' = Oba$ . Поэтому треугольники  $Oa'\beta'$  и  $Oab$  подобны. Так же доказывается подобие и других треугольников.

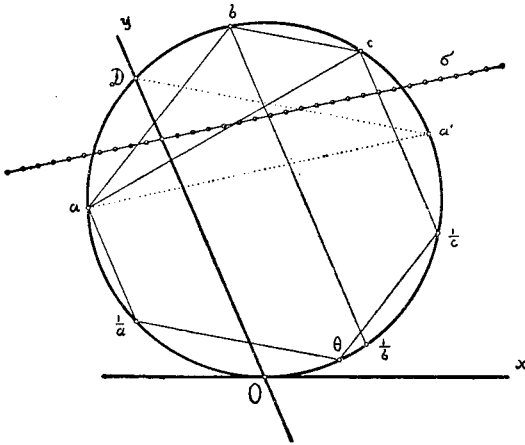
6. Замечая, что  $Oa'b = xOa$  (свойство 3)  $= Oa'a$ , видим, что  $aa'$  параллельна линии  $b$ . Так же докажем, что  $bb'$  и  $cc'$  параллельны линии  $b$ .

7. Так как окружности  $Oa$  и  $Ob$  пересекаются в точках  $O$  и  $\gamma'$ , то линия  $O\gamma'$  перпендикулярна к линии  $PQ$ , соединяющей центры этих окружностей, и делится линией  $PQ$  пополам. Поэтому  $\gamma'$  есть отражение точки  $O$  в стороне  $PQ$  треугольника  $PQR$ . Также  $\beta'$  и  $a'$  суть отражения точки  $O$  в сторонах  $PR$  и  $QR$  того же треугольника. Но точки  $P, Q, R$  лежат на окружности, проходящей через точку  $O$  (следствие теоремы I). Следовательно, по теореме IV § 1, точка пересечения высот треугольника  $PQR$  лежит на линии  $b$ .

**§ 3.** Из предыдущего параграфа мы видим, что каждому треугольнику  $abc$ , вписанному в основную окружность  $D$ , будет соответствовать определенная прямая  $b$ , ибо эта последняя вполне определяется лучами  $Oa, Ob, Oc$ , проведенными из точки  $O$  к вершинам треугольника, и основной линией  $Oy$ . Мы остановимся несколько подробнее на изучении свойств линии  $b$  и вытекающих из них построений.

Проведем через точки  $a, b, c$  линии, параллельные основной линии  $Oy$ , и обозначим точки их пересечения с окружностью таким образом  $1/a, 1/b, 1/c$  (фиг. 8).

**Теорема I.** *Линии, проведенные через  $1/a, 1/b, 1/c$  соответственно параллельные сторонам  $bc, ca, ab$  треугольника  $abc$ , вписанного в окружность  $D$ , пересекаются в одной и той же точке  $\theta$  окружности, и прямая  $O\theta$  параллельна линии  $\sigma$  для треугольника  $abc$ .*



Фиг. 8.

Для доказательства этой теоремы проведем через точку  $1/a$  прямую  $(1/a, \theta)$ , параллельную  $bc$ , и обозначим точку ее пересечения с окружностью буквою  $\theta$ . Рассматривая шестиугольник  $\theta, 1/a, a, c, b, 1/b, \theta$ , мы видим, что в нем две пары противоположных сторон параллельны, а именно стороны  $(\theta, 1/a)$  и  $bc$  и стороны  $(a, 1/a)$  и  $(b, 1/b)$ . Поэтому Паскалевой линией для этого шестиугольника будет служить бесконечно удаленная прямая, и, по теореме Паскаля, противоположные стороны  $ca$  и  $(\theta, 1/b)$  должны быть также параллельны. Таким же обра-

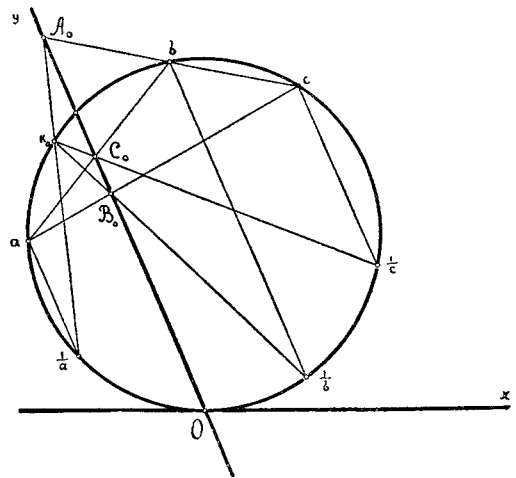
зом, рассматривая шестиугольник  $\theta, 1/a, a, b, c, 1/c, \theta$ , докажем, что прямая  $(\theta, 1/c)$  будет параллельна прямой  $ab$ .

Чтобы показать, что  $O\theta$  параллельна линии  $\sigma$ , проведем через основную точку  $D$  линию  $Da'$ , параллельную стороне  $bc$ , а следовательно параллельную и прямой  $(\theta, 1/a)$ , и обозначим точку пересечения ее с окружностью через  $a'$ . На основании теоремы III, 6, § 2, линия  $aa'$  параллельна линии  $\sigma$ . В шестиугольнике  $D, a', a, 1/a, \theta, O, D$  две пары противоположных сторон  $(Da')$  и  $(\theta, 1/a)$ ,  $(a, 1/a)$  и  $(OD)$  параллельны. Следовательно, по теореме Паскаля, сторона  $O\theta$  будет параллельна стороне  $aa'$  и  $\sigma$ .

Кроме точки  $\theta$ , которой характеризуется направление линии  $\sigma$ , с треугольником  $abc$  связана еще одна точка основной окружности, которая определяется следующей теоремой:

**Теорема II.** *Если точки  $A_0, B_0, C_0$ , в которых стороны  $bc, ca, ab$  треугольника  $abc$  пересекаются с осью  $y$ , соединим прямыми  $(1/a, A_0), (1/b, B_0), (1/c, C_0)$  с точками  $1/a, 1/b, 1/c$ , соответственно, то прямые пересекутся в одной и той же точке  $k_0$ , лежащей на основной окружности.*

Пусть прямая  $(1/a, A_0)$  (фиг. 9) встречается с основной окружностью в точке  $k_0$ . Возьмем шестиугольник  $k_0, 1/a, a, b, c, 1/c, k_0$ . В нем противоположные стороны  $(k_0, 1/a)$  и  $bc$  по построению пересекаются в точке  $A_0$ , лежащей на



Фиг. 9.



мая  $Dc$  касается окружности  $Oc$  и оба угла измеряются половиной одной и той же дуги  $c\beta_1$ . Угол же  $Dck_0$  равен углу  $DOk_0$ , ибо оба измеряются половиной дуги  $Dk_0$ . Следовательно  $cc_x\beta_1 = DOk_0$ , и, вследствие параллельности прямых  $cc_x$  и  $OD$ , прямые  $c_xC\beta_1$  и  $Ok_0$  будут также параллельны.

**Теорема VI.** Пусть  $A, B, C$  суть точки, в которых линия  $\sigma$  треугольника  $abc$  пересекает лучи  $Oa, Ob, Oc$ . Прямые  $A_0A, B_0B, C_0C$  параллельны соответственно прямым  $Da, Db$  и  $Dc$ .

Действительно (фиг. 10), вследствие параллельности прямой  $(c, 1/c, c_x)$  с осью  $y$  и прямых  $c_xC$  и  $Ok_0$ , мы имеем следующие равенства между углами фигуры

$$cc_xC = DOk_0 = D, 1/c, C_0,$$

ибо два последних опираются на одну и ту же дугу  $Dk_0$ ,

$$cc_xO = D, 1/c, O,$$

ибо первый измеряется половиной разности дуг  $(cDO) - (1/c O) = (cDO) - (cD) = (Dk_0O)$ , а второй половиной дуги  $(Dk_0O)$ ,

$$c_xOc = (1/c, O, D),$$

ибо они измеряются половинами равных дуг  $Oc$  и  $(1/c, D)$ ,

$$c_xcO = (1/c, D, O),$$

ибо они измеряются половиной одной и той же дуги  $(1/c, O)$ .

Вследствие равенств этих углов фигура  $O, D, 1/c, C_0$  подобна фигуре  $O, c, c_x, C$ , и прямые, соединяющие соответствующие точки  $C_0C$  и  $Dc$ , параллельны.

Так же доказывается и параллельность прямых  $Db$  и  $Da$  с прямыми  $B_0B$  и  $A_0A$ .

**Следствие.** Вследствие подобия треугольников  $OC_0C$  и  $ODc$ , окружность  $OC_0C$ , описанная около треугольника  $OC_0C$ , будет подобна и подобно расположена с окружностью  $D$  и будет касаться оси  $x$  в точке  $O$ . Таким образом окружность, проведенная через точку  $C$  и касающаяся оси  $x$  в точке  $O$ , пересечет ось  $y$  в точке  $C_0$  и, обратно, окружность, касающаяся оси  $x$  в точке  $O$  и проходящая через точку  $C_0$ , пересечет луч  $Oc$  в точке  $C$ .

**Задача.** Для данного треугольника  $abc$ , вписанного в окружность  $D$ , построить линию  $\sigma$ .

Задачу можно решить различным образом.

1. Строим на лучах  $Oa, Ob, Oc$  окружности. Точки их пересечения  $\alpha', \beta', \gamma'$  на основании теоремы III, 2, § 2, определяют линию  $\sigma$ .

2. Находим точки пересечения  $\alpha', \beta', \gamma'$  линии  $\sigma$  со сторонами треугольника  $abc$ , пользуясь той же теоремой III, § 2.

А. Построим на одном из лучей  $Oa, Ob, Oc$ , напр. на  $Oc$ , окружность. Она пересечется со сторонами  $ca$  и  $cb$  в точках  $\beta'$  и  $\alpha'$ . Прямая  $\alpha'\beta'$  и будет линией  $\sigma$ .

В. Определяем на сторонах  $bc, ca, ab$  точки  $\alpha', \beta', \gamma'$  так, чтобы  $yOa = bO\gamma'$ ,  $yOb = aO\alpha'$ ,  $yOc = aO\beta'$ .

С. Определяем на сторонах  $bc, ca, ab$  точки  $\alpha', \beta', \gamma'$  так, чтобы  $O\alpha'b = O\beta'c = O\gamma'a = xOy = \vartheta$ .

Этот способ особенно удобен в том случае, когда оси  $xOy$  ортогональны и основная линия  $Oy$  совпадает с диаметром окружности  $D$ , ибо тогда точки  $\alpha', \beta', \gamma'$  будут подошвами перпендикуляров, опущенных из точки  $O$  на стороны треугольника  $abc$ . Линия  $\sigma$  будет тогда линией Симпсона треугольника  $abc$ .

Д. Чтобы найти точку пересечения линии  $\sigma$  с какой-нибудь стороной треугольника, напр. со стороной  $ab$ , проведем через  $D$  прямую, параллельную с  $ab$ , до пересечения с окружностью в точке  $c'$  и соединим  $c'$  с точкой  $O$ . Точка пересечения прямой  $Oc'$  с  $ab$  и будет точкой  $\gamma'$  линии  $\sigma$ .

3. Мы можем определить точки  $A, B, C$  пересечения линии  $\sigma$  с лучами  $Oa, Ob, Oc$ . Положим, мы хотим определить пересечение с  $Oc$ .

А. Построим по указанию теоремы II точку  $k_0$  для данного треугольника  $abc$ . Проведем через точку  $c$  линию, параллельную оси  $Oy$  до пересечения с касательной  $Ox$  в точке  $c_x$ . Прямая, проведенная через  $c_x$  параллельно  $Ok_0$ , на основании теоремы IV, пересечет луч  $Oc$  в той же точке  $C$ , в которой этот луч встречается с линией  $\sigma$ .

В. Определим точку  $C_0$  пересечения прямой  $ab$  с осью  $Oy$  и через нее проведем прямую, параллельную  $Dc$ ; по теореме VI она пересечет прямую  $Oc$  в точке  $C$ .

4. Если нужно знать только направление линии  $\sigma$ , то мы можем воспользоваться свойством точки  $\theta$ , о которой говорится в теореме I; линия  $\sigma$  будет параллельна прямой  $O\theta$ , или же построить точку  $c'$ , о которой говорится в способе 2, D: линия  $\sigma$  будет параллельна прямой  $cc'$  (теорема III, 6, § 2).

§ 4. Возьмем две окружности  $D_0$  и  $H_0$  пересекающихся в точках  $O$  и  $R$ . Обе окружности будем считать основными; касательная  $Oy$  ко второй окружности служит основной линией для первой и пересекает ее в основной точке  $D_0$ ; касательная  $Ox$  к первой служит основной линией для второй и пересекает ее в основной точке  $H_0$ . Построим на касательных параллелограмм, одна диагональ которого лежит на радикальной оси  $OR$ ; параллельно другой диагонали проведем прямую  $t_0Ot'_0$ , пересекающуюся с окружностями  $D_0$  и  $H_0$  в точках  $t_0$  и  $t'_0$ . На основании теоремы II, § 1,  $Ot_0 = -Ot'_0$ .

На каждом луче, проходящем через точку  $O$ , мы определим точку следующим образом.

Проведя луч, найдем точки  $a$  и  $a_1$ , в которых он пересекается с окружностями  $D_0$  и  $H_0$ . Построим точку  $F'$ , гармонично сопряженную с  $O$  относительно точек  $a$  и  $a_1$ , и разделим отрезок  $OF'$  пополам. Середину отрезка  $OF'$ , точку  $A$ , мы будем называть соответствующую лучу  $Oaa_1$  и точкам  $a$  и  $a_1$ , а эти последние — изображениями точки  $A$  на окружностях  $D_0$  и  $H_0$ .

Геометрическое место точек, соответствующих лучам, проходящим через точку  $O$ , представляет собой кривую, которая называется строфойдой.

**Теорема I.** *Между отрезками  $Oa, Oa_1, OA$  существует соотношение*

$$\frac{1}{OA} = \frac{1}{Oa} + \frac{1}{Oa_1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho \sin \vartheta} = \frac{1}{D_0 \sin \varphi} + \frac{1}{H_0 \sin \varphi'}$$

где  $\rho = OA$ ,  $\varphi = xOA$ ,  $\varphi' = AOy$  и  $\vartheta = xOy$  и для краткости положено  $OD_0 = D_0$  и  $OH_0 = H_0$ . Отрезкам приписывается знак в зависимости от направления.

Первое равенство вытекает из построения точки  $A$ . Так как точка  $F$  гармонично сопряжена с  $O$  относительно точек  $a$  и  $a_1$ , то

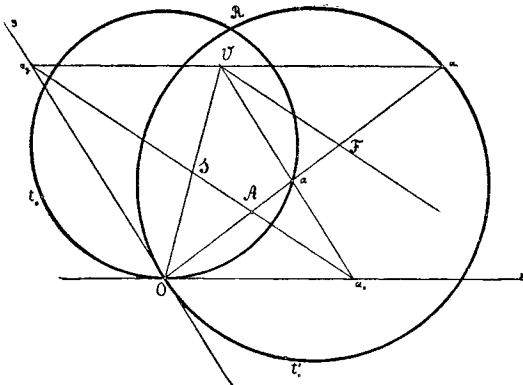
$$\frac{2}{OF} = \frac{1}{Oa} + \frac{1}{Oa_1},$$

откуда, замечая, что  $2OA = OF$ , мы получаем первое равенство. Из треугольников  $OD_0a$  и  $OH_0a_1$  имеем  $D_0 \sin \varphi = Oa \sin \vartheta$ ,  $H_0 \sin \varphi' = Oa_1 \sin \vartheta$ . Подставляя значения  $Oa$  и  $Oa_1$ , взятые из этих соотношений в равенство первое, получаем второе. Углы  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\vartheta$  связаны между собой равенством  $\vartheta = \varphi + \varphi'$ .

Если основные окружности ортогональны, то  $\vartheta = 90^\circ$ , и второе равенство обращается в следующее.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{D_0 \sin \varphi} + \frac{1}{H_0 \cos \varphi}.$$

**Следствие.** Двойная точка строфоиды находится в точке  $O$ , оси  $Ox$  и  $Oy$  суть касательные в точке  $O$ . Ассимптота строфоиды параллельна прямой  $t_0O't'_0$ .



Фиг. 11.

В самом деле, если луч  $Oa$  совпадает с  $Oy$  или с  $Ox$ , то или  $Oa_1 = 0$  или  $Oa = 0$  и равенство первое дает нам в обоих случаях  $OA = 0$ . Таким образом, точка  $O$  соответствует двум лучам  $Ox$  и  $Oy$  и будет, следовательно, двойной. Точка  $A$ , принадлежащая переменному лучу  $Oa$ , будет приближаться к точке  $O$  по мере того как луч  $Oa$ , вращаясь около  $O$ , будет приближаться к  $Ox$  или к  $Oy$ . Эти две оси будут, поэтому, касательными в двойной точке строфоиды.

При совпадении луча  $Oa$  с прямой  $t_0O't'_0$ ,  $Oa = Ot'_0 = -O't_0 = -Oa_1$  и  $OA = \infty$ .

**Теорема II.** Через точки  $a$  и  $a_1$ , в которых луч  $Oaa_1$  пересекает основные окружности  $D_0$  и  $H_0$ , проведем прямые, соответственно параллельные осям  $Oy$  и  $Ox$ ; одна диагональ полученного параллелограмма будет лежать на радикальной оси, а другая  $a_x a_y$  будет параллельна прямой  $t_0O't'_0$  и пройдет через точку  $A$  строфоиды, лежащей на луче  $Oaa_1$ .

Действительно (фиг. 11), пусть  $Oa_x va_y$  есть параллелограмм, который мы получим, проведя через точку  $a$  линию  $aa_x$ , параллельную оси  $Oy$ , и через  $a_1$  — линию  $a_1 a_y$ , параллельную оси  $Ox$ . По теореме I, § 1, точка  $v$  пересечения этих линий, а следовательно и диагональ  $Ov$ , будет лежать на радикальной оси  $OR$  окружностей. Другая диагональ будет параллельна линии  $Ot_0 t'_0$ . Точка  $S$  пересечения диагоналей, находясь посередине диагонали  $a_x a_y$ , сопряжена с бесконечно-удаленной точкой ее относительно точек  $a_x$  и  $a_y$ . Поэтому прямые  $va_x$ ,  $va_y$ ,  $vO$ , и прямая, проведенная через точку  $v$ , параллельно диагонали  $a_x a_y$ , пересекут луч  $Oaa_1$  в четырех точках  $a$ ,  $a_1$ ,  $O$ ,  $F$ , образующих гармоническую систему, и середина отрезка  $OF$ , т. е. точка  $A$ , в которой диагональ пересечет луч  $Oaa_1$ , будет по определению принадлежать строфоиде.

Параллелограмм, о котором говорится в теореме, мы будем называть параллелограммом, соответствующим лучу  $Oa$ .

Проведем через точку  $O$  два луча  $Oaa_1$  и  $Obb_1$ , которые пересекают окружности  $D_0$  и  $H_0$ , первый — в точках  $a$  и  $a_1$ , второй — в точках  $b$  и  $b_1$ . Построим на них окружности  $Oa$  и  $Ob$  по отношению к основной окружности  $D_0$  и основной линии  $Oy$ , и пусть точка их пересечения —  $\gamma'$ . Точки  $ab\gamma'$  по теореме II, § 2, будут лежать на одной прямой. Построим на тех же лучах по отношению к другой основной окружности  $H_0$  и основной линии  $Ox$  еще две окружности  $Oa_1$  и  $Ob_1$ . Точка их пересечения  $\gamma$  будет лежать на прямой  $a_1b_1$ .

**Теорема III.** *Прямые  $O\gamma$  и  $O\gamma'$  параллельны соответственно с прямыми  $ab\gamma'$  и  $a_1b_1\gamma$ . Диагональ  $\gamma\gamma'$  параллелограмма, образованного этими четырьмя прямыми, проходит через точки  $A$  и  $B$  строфоиды, лежащие на лучах  $Oaa_1$  и  $Obb_1$ . Угол параллелограмма  $\gamma'O\gamma = xOy = \vartheta$ .*

На основании теоремы II, § 2,  $yOa = bO\gamma'$  (фиг. 12). Применяя ту же теорему к основной окружности  $H_0$  основной линии  $Ox$ , мы имеем  $xOa_1 = b_1O\gamma$ . Поэтому  $\vartheta = xOy = xOa + aOy = xOa_1 + \gamma'Ob = b_1O\gamma + \gamma'Ob = \gamma'O\gamma$ . На основании той же теоремы  $O\gamma'a = \vartheta$ ; следовательно, прямая  $ab\gamma'$  параллельна прямой  $O\gamma$ . Так же докажем, что прямая  $a_1b_1\gamma$  параллельна прямой  $O\gamma'$ .

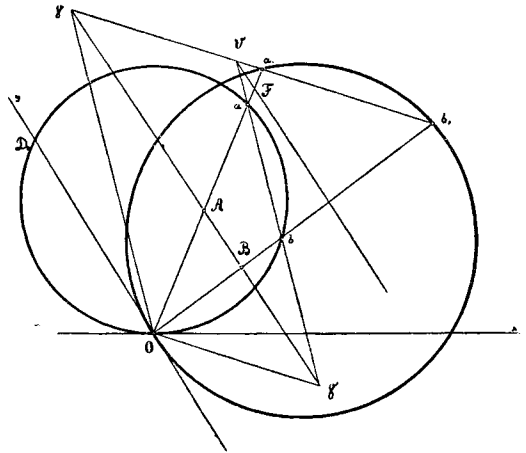
Обозначим в параллелограмме, образованном линиями  $O\gamma'$ ,  $ab\gamma'$ ,  $a_1b_1\gamma$ ,  $O\gamma$ , вершину противоположную точке  $O$ , через  $v$ . Точка пересечения диагоналей,  $S$ , находясь посередине диагонали  $\gamma'\gamma$ , будет гармонично сопряжена с бесконечно удаленной точкой прямой  $\gamma'\gamma$  относительно вершин  $\gamma'$  и  $\gamma$ . Поэтому линии  $vS$ ,  $v\gamma'$ ,  $v\gamma$  и прямая, проведенная через  $v$  параллельно диагонали  $\gamma'\gamma$ , спроектируют эти четыре точки на прямые  $Oaa_1$  и  $Obb_1$  в точки  $O$ ,  $a$ ,  $a_1$ ,  $F$  и  $O$ ,  $b$ ,  $b_1$ ,  $G$  образующие гармонические системы, причем  $O$  и  $F$  будут сопряжены с  $a$  и  $a_1$ ,  $O$  и  $G$  — с  $b$  и  $b_1$ . Вследствие параллельности  $FvG$  и  $\gamma'\gamma$ , точки  $A$  и  $B$ , в которых диагональ  $\gamma\gamma'$  встретит лучи  $Oaa_1$  и  $Obb_1$ , будут находиться посередине отрезков  $OF$  и  $OG$  и следовательно будут точками строфоиды.

Построенный указанным способом при помощи двух лучей  $Oa$  и  $Ob$  параллелограмм  $O\gamma v\gamma'$ , диагональю которому служит  $\gamma'AB\gamma$ , мы будем называть параллелограммом соответствующим лучам  $Oa$  и  $Ob$ .

**Следствие.** Четыре точки  $\gamma$ ,  $\gamma'$ ,  $A$ ,  $B$  лежат на одной прямой. Но прямая определяется двумя точками. Поэтому прямая, которая проходит через две из четырех точек  $AB\gamma\gamma'$ , пройдет и через две другие.

**Теорема IV.** *Через концы луча  $Oaa_1$ , точки  $a$  и  $a_1$ , проведем касательные к основным окружностям. Диагональ параллелограмма, построенного на этих касательных, одна вершина которого находится в точке  $O$ , будет касательной к строфоиде, и точка ее пересечения с лучем  $Oaa_1$  — точкой касания.*

Эта теорема вытекает из предыдущей, если мы предположим, что лучи  $Oaa_1$  и  $Obb_1$  совпадают, ибо тогда точки  $b$ ,  $b_1$ ,  $B$  совпадут с точками  $a$ ,  $a_1$ ,  $A$  и прямые  $ab\gamma'$  и  $a_1b_1\gamma$  обратятся в касательные к основным окружностям, а прямая  $AB\gamma\gamma'$  — в касательную к строфоиде в точке  $A$ , в которой она пересекается с лучем  $Oaa_1$  (фиг. 13).



Фиг. 12.

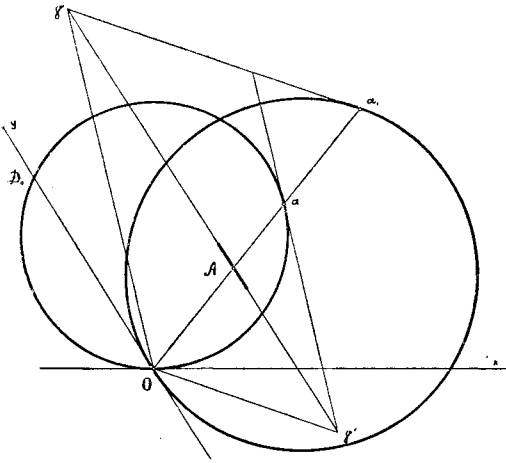


Параллелограмм  $O\gamma\gamma'$  можно было бы назвать параллелограммом, построенным на двойном луче  $Oa$ .

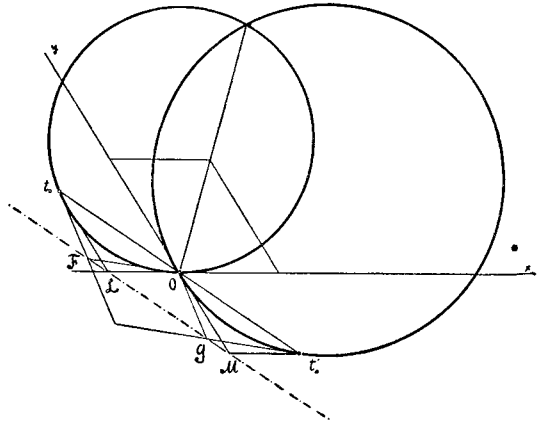
**Следствие.** Применяя эту теорему к лучу  $t_0O't_0$ , мы приходим к такому построению асимптоты строфоиды. Построим параллелограмм  $OGvF$  на касательных, проведенных в точках  $t_0$  и  $t'_0$  к основным окружностям. Диагональ его  $GF'$  будет асимптотой (фиг. 14).

**Теорема V.** Через  $t_0$  проведем прямую параллельную оси  $y$  до пересечения с осью  $Ox$  в точке  $t_{0x}$  и через  $t'_0$  — прямую параллельную оси  $x$  до пересечения с осью  $Oy$  в точке  $t_{0y}$ ; прямая  $t_{0x}t_{0y}$  будет асимптотой.

Построим асимптоту как было указано в предыдущей теореме (фиг. 14). Пусть  $L$  и  $M$  суть точки пересечения осей  $Ox$  и  $Oy$  с диагональю  $F'G$ , т. е. с асимптотой. Треугольники  $t_0F'O$  и  $OLt_0$  равны, так как они имеют общее основание, одинаковую высоту и равные углы  $F't_0O$  и  $t_0OL$ , измеряемые половиной дуги  $Ot_0$ . Вследствие равенства треугольников  $\angle Ot_0L = \angle F'Ot_0$ . Но  $F'Ot_0 = G't_0O$ , ибо прямые  $OF$  и  $t'_0G$  по построению параллельны, и  $G't_0O = t'_0Oy$ , ибо они измеряются



Фиг. 13.



Фиг. 14.

половиной дуги  $Ot'_0$ , и, наконец,  $t'_0Oy = t_0Oy$  как смежные. Из цепи этих равенств имеем  $Ot_0L = t_0Oy$ , и заключаем, что  $t_0L$  параллельна оси  $Oy$ . Так же докажем, что  $t'_0M$  параллельна оси  $Ox$ . Таким образом точки  $L$  и  $M$ , в которых асимптота пересекается с осями, тождественны с точками  $t_{0x}$  и  $t_{0y}$ , о которых говорится в теореме, и асимптота совпадает с прямой  $t_{0x}t_{0y}$ .

**Теорема VI.** Прямая, соединяющая две точки  $A$  и  $B$  строфоиды, пересекает строфоиду еще в третьей точке  $C$ . Прямая, проходящая через три точки строфоиды, служит линией  $b$  для треугольника  $abc$ , образованного изображением этих точек на основной окружности.

Пусть  $A$  и  $B$  (фиг. 7) — две точки строфоиды. Окружности  $Oa$  и  $Ob$ , построенные на лучах  $Oa$  и  $Ob$ , проведенных через точки  $A$  и  $B$ , пересекаются в точке  $\gamma'$ , которая, на основании теоремы III, лежит на прямой  $AB$  и, на основании теоремы II, § 2, — на прямой  $ab$ . Окружности  $Oa$  и  $Ob$  пересекают прямую  $AB$  еще в двух точках, окружность  $Oa$  — в точке  $\beta'$  и окружность  $Ob$  — в точке  $\alpha'$ . Докажем сначала, что точка  $c$ , в которой пересекаются прямая  $a\beta'$  и  $ba'$ , лежит на окружности  $D_0$ . Рассмотрим, в самом деле, треугольник  $abc$ . Точки  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  по построению лежат на сторонах этого треугольника,  $\alpha'$  — на  $bc$ ,  $\beta'$  — на  $ca$  и  $\gamma'$  —

на  $ab$ . Поэтому окружности  $a\beta'\gamma'$  или  $Oa$ ,  $b\gamma'a'$  или  $Ob$  и  $ca'\beta'$  должны пройти через одну и ту же точку  $O$  (следствие 1, лемма IV, § 1) и притом, так как точки  $a', \beta', \gamma'$  лежат на одной прямой, точка  $c$  должна находиться на окружности  $Oab$ , т. е. на окружности  $D_0$ .

Рассмотрим, далее, две окружности  $ca'\beta'$  и  $a\beta'\gamma'$  или  $Oa$ . Секущая  $a\beta'c$  проходит через точку их пересечения  $\beta'$ , и потому касательная в точке  $a$  к окружности  $a\beta'\gamma'$  или  $Oa$  и в точке  $c$  к окружности  $ca'\beta'$  должны пересекаться в точке, лежащей на окружности  $Oca$ , т. е. на окружности  $D_0$  (следствие леммы II, § 1). Но первая касательная, по построению, проходит через основную точку  $D_0$ ; следовательно и касательная ко второй окружности  $ca'\beta'$  в точке  $c$  также пройдет через  $D_0$ , и окружность  $ca'\beta'$  представляет собой окружность  $Oc$ , построенную на луче  $Oc$ .

Обратим, наконец, внимание на две окружности  $a\beta'\gamma'$  или  $Oa$  и  $ca'\beta'$  или  $Oc$ , построенные на лучах  $Oa$  и  $Oc$ . Линия  $AB$  проходит через точку  $\beta'$  пересечения этих окружностей и через точку  $A$  строфоиды, соответствующую лучу  $Oa$ . Поэтому, на основании теоремы III, эта прямая  $A\beta'$  пройдет и через точку  $C$  строфоиды, находящуюся на луче  $Oc$ . Итак, прямая, соединяющая две точки строфоиды  $A$  и  $B$ , пройдет еще и через третью точку  $C$ .

Кроме точки  $C$  на прямой  $AB$  нет точек, принадлежащих строфоиде. Ибо, если бы была еще точка  $D$ , то окружность, построенная на луче  $Od$ , соответствующем этой точке, должна была бы пересечься с окружностями  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$  в точках, лежащих на прямой  $ABC$ , т. е. она должна была бы пройти через какие-нибудь две из точек  $a', \beta', \gamma'$ , в которых окружности  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$  пересекаются с этой прямой, и следовательно совпасть с одной из этих окружностей. Но это невозможно, если точка  $D$  не совпадает ни с одной из точек  $A, B$  или  $C$ .

Из сказанного мы видим, что точки  $A, B, C$  строфоиды лежат на прямой, соединяющей точки  $a', \beta', \gamma'$ , в которых пересекаются окружности  $Oa$ ,  $Ob$  и  $Oc$ , т. е. на линии  $\sigma$  для треугольника, образованного изображениями  $a, b, c$  точек  $A, B, C$  на основной окружности  $D_0$ .

**Теорема VII.** Пусть  $a, b, c$  суть изображения на окружности  $D_0$  трех точек  $A, B, C$  строфоиды,  $A_0, B_0, C_0$ —точки пересечения сторон  $bc, ca, ab$  с осью  $Oy$  и  $k_0$ —точка пересечения прямых  $(A_0, 1/a)$ ,  $(B_0, 1/b)$ ,  $(C_0, 1/c)$  с окружностью  $D_0$ . Для того чтобы точки  $A, B, C$  лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы прямая  $Ok_0$  была параллельна асимптоте, иначе говоря, точка  $k_0$  совпала бы с точкой  $t_0$ .

В самом деле, проведем через  $a$  прямую, параллельную оси  $Oy$ , до пересечения с осью  $x$  в точке  $a_x$  и через точку  $a_1$ , в которой луч  $Oa$  встречает окружность  $H_0$ ,—прямую, параллельную оси  $x$  до пересечения с осью  $Oy$  в точке  $a_y$ . На основании теоремы II прямая  $a_x a_y$  пройдет через точку  $A$  и будет параллельна прямой  $Ot_0$ .

Если точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой, то на основании предыдущей теоремы эта прямая  $ABC$  будет линией  $\sigma$  для треугольника  $abc$  и, по теореме IV и построению 3, § 3, линия  $a_x A$  будет параллельна прямой  $Ok_0$ . Прямые  $Ok_0$  и  $Ot_0$ , будучи параллельными одной и той же прямой  $a_x A$ , должны совпасть.

Обратно, если точки  $k_0$  и  $t_0$  и прямые  $Ok_0$  и  $Ot_0$  совпадают, то прямая  $a_x A$ , будучи на основании теоремы II параллельна прямой  $Ot_0$ , будет в то же время параллельна и с  $Ok_0$ , и точка  $A$  по теореме IV и построению 3, § 3,— точкой пересечения линии  $\sigma$  треугольника  $abc$  с лучом  $Oa$ . Так же докажем, что точки  $B$  и  $C$  строфоиды лежат на линии  $\sigma$ . Итак, при совпадении  $k_0$  и  $t_0$  все три точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой—линии  $\sigma$  для треугольника  $abc$ .

**§ 5. Задача 1.** Даны: основная окружность, основная линия и направление асимптоты; построить точку строфоиды и другую основную окружность.

**Задача 2.** Даны: основная окружность, основная линия и точка строфоиды; построить асимптоту и другую основную окружность.

**Задача 3.** Даны: основная окружность, основная линия и точка строфоиды; построить другую точку.

**Задача 4.** Даны: основная окружность, направление асимптоты, точка  $O$  и точка строфоиды; построить основную линию и другую основную окружность.

**Задача 5.** Даны: основная линия, направление асимптоты и точка строфоиды; построить основные окружности.

**Задача 6.** Даны две основные окружности; построить точки строфоиды и асимптоту.

**Задача 7.** Даны две точки строфоиды и оси  $xOy$ ; построить основные окружности.

Для решения этих задач удобнее всего пользоваться теоремами II, III и V предыдущего параграфа.

В теореме III играют роль точки  $\gamma'$  и  $\gamma$ .

Через точку  $\gamma'$  проходят пять линий: 1) Линия  $AB$ . 2) Окружность  $Oa$ , построенная на луче  $Oa$  по отношению к основной окружности  $D_0$ . 3) Окружность  $Ob$ , построенная на луче  $Ob$  по отношению к основной окружности  $D_0$ . 4) Прямая  $ab$ , соединяющая изображения точек  $A$  и  $B$  строфоиды на окружности  $D_0$ . 5) Прямая  $O\gamma'$ , которая определяется одним из следующих ее свойств: во-первых, она параллельна прямой  $a_1b_1$ , соединяющей изображения точек  $A$  и  $B$  на окружности  $H_0$ , во-вторых,  $yOa = bO\gamma'$  и  $yOb = aO\gamma'$ , в-третьих,  $O\gamma'a = O\gamma'b = xOy = \vartheta$  и, в-четвертых, точка  $c'$  пересечения ее с основной окружностью лежит на прямой, проходящей через точку  $D_0$  и параллельной  $ab$ .

Пересечением двух из указанных пяти линий можно определить положение точки  $\gamma'$ .

Все что сказано относительно точки  $\gamma'$  можно повторить и относительно точки  $\gamma$ , только надо вместо окружности  $D_0$  и оси  $y$  взять окружность  $H_0$  и ось  $x$ .

Четыре точки  $\gamma, \gamma', A, B$  лежат на одной прямой. Но прямая определяется двумя точками. Поэтому прямая, проведенная через две из четырех точек  $\gamma, \gamma', A, B$ , пройдет и через две другие.

Эти свойства точек  $\gamma, \gamma'$  мы должны иметь в виду при решении предыдущих задач. Мы остановимся только на решении задач 1, 2 и 3.

**Решение задачи 1.** А. Задача решается при помощи теоремы II, § 4.

Если нам дана окружность  $D_0$ , ось  $y$  и точка  $t_0$  на окружности, то для определения точки строфоиды, лежащей на луче  $Oa$ , через точку пересечения его с окружностью  $D_0$ , точку  $a$ , проводим прямую параллельную оси  $Oy$  до пересечения с осью  $x$  в точке  $a_x$  и через  $a_x$  — прямую  $a_xA$ , параллельную  $Ot_0$ . Точка пересечения этой прямой с лучом  $Oa$  и будет точкой строфоиды, лежащей на луче  $Oa$ .

Если же нам дана основная окружность  $H_0$ , ось  $Ox$  и точка  $t'_0$  на окружности  $H_0$ , то для определения точки строфоиды, лежащей на луче  $Oa_1$ , через конец его  $a_1$  проведем линию параллельную оси  $Ox$  до пересечения с осью  $Oy$  в точке  $a_y$ , и через точку  $a_y$  — прямую  $a_yA$ , параллельную  $Ot'_0$ . Точка пересечения этой прямой с лучом  $Oa$  и будет точкой строфоиды, лежащей на луче  $Oa'$ .

В. Задачу можно решить, пользуясь теоремой V, § 3, и теоремой VI, § 4.

Чтобы построить точку  $C$  на произвольном луче  $Oc$ , мы рассматриваем ее как точку пересечения строфоиды с прямой, соединяющей две точки строфоиды  $A$  и  $B$ . Точка  $C$  в таком случае будет точкой пересечения линии  $\sigma$  для треугольника  $abc$  с лучом  $Oc$ , и мы можем для ее определения воспользоваться задачей § 3. Вытекающее из решения 3, А построение будет тождественно с предыдущим А. Из решения же 3, В задачи § 3 вытекает такое построение точки  $C$ .

По точке  $c$  построим точку  $1/c$  и проведем прямую  $(t_0, 1/c)$ ; по теореме VII, § 4 она пересечет ось  $y$  в той же точке  $C_0$ , в которой с осью  $y$  пересекается и линия  $ab$ . Прямая, проведенная через  $C_0$  и параллельная с  $Dc$  пересечет луч  $Oc$  в искомой точке  $C$ .

Вторую основную окружность,  $H_0$ , можно построить двумя способами.

А. Построим параллелограмм на осях, одна диагональ которого была бы параллельна прямой  $Ot_0$ . Другая диагональ параллелограмма будет радикальной осью окружностей и пересечется с окружностью  $D_0$  в точке  $R$ , через которую должна пройти окружность  $H_0$ . Окружность  $H_0$  проходит через точки  $O$ ,  $R$  и касается оси  $Oy$ .

В. Продолжим прямую  $Ot_0$  так, чтобы точка  $O$  лежала посредине отрезка  $t_0t'_0$ . Окружность  $H_0$  должна пройти через точки  $O$ ,  $t'_0$  и касаться оси  $y$ .

**Решение задач 2 и 3.** Мы можем свести задачу 2 к задаче 1. Пусть  $A$ —данная точка, и  $a$ —ее изображение на окружности  $D_0$ . Проведем через  $a$  прямую, параллельную оси  $y$ , до пересечения с осью  $x$  в точке  $a_x$ . Прямая  $Aa_x$  должна быть параллельна асимптоте. Проведем через  $O$  линию, параллельную  $Aa_x$ , получим точку  $t_0$ .

Разнообразные решения задачи 3 мы получаем, пользуясь свойствами точки  $\gamma'$ , о которой говорилось в начале этого параграфа.

Возьмем произвольный луч  $Ob$  и строим точку  $\gamma'$ , соответствующую лучам  $Oa$  и  $Ob$ , как точку пересечения каких-либо двух из линий 2), 3), 4) или 5). Соединив точку  $\gamma'$  с точкой  $A$ , в пересечении  $\gamma'A$  с лучом  $Ob$  получаем точку  $B$  строфоиды. В зависимости от того, какие из линий 2), 3), 4) или 5) мы возьмем, мы получаем различные построения. Укажем следующие:

А. Воспользуемся линиями 4) и 5). Соединим концы  $a$  и  $b$  лучей  $Oa$  и  $Ob$  прямой и построим прямую  $O\gamma'$ , воспользовавшись тем ее свойством, что  $yOa = bO\gamma'$ . Отложим от точки  $b$  дугу  $be'$ , равную дуге  $D_0a$ , и соединим  $O$  с  $c'$ . Пересечение прямых  $ab$  и  $Oc'$  определит точку  $\gamma'$ . Точку  $c'$  можно было бы построить иначе, замечая, что  $D_0c' \parallel ab$ . Пересечение прямой  $\gamma'A$  с лучом  $Ob$  определяет точку  $B$  на луче  $Ob$ .

В. Воспользуемся линиями 2) и 5). Построим на луче  $Oa$  окружность  $Oa$  и определим точки  $a_0$  и  $a_b$  пересечения ее с осью  $y$  и лучом  $Ob$ . Точку  $\gamma'$ , которая, как мы знаем, лежит на окружности  $Oa$ , мы получим, отложив дугу  $a_b\gamma' = a_0a$ , ибо тогда угол  $bO\gamma' = yOa$ .

С. Воспользуемся линиями 2) и 4). Построим на луче  $Oa$  окружность  $Oa$  и определим пересечение ее  $\gamma'$  с прямой  $ab$ , соединяющей точки концы  $a$  и  $b$  лучей  $Oa$  и  $Ob$ .

Д. В том случае когда основная линия  $Oy$  совпадает с диаметром основной окружности  $OD_0$ , для построения прямой  $O\gamma'$  и точки  $\gamma'$  удобно воспользоваться третьим свойством этой линии, ибо тогда  $\vartheta = xOy = 90^\circ$  и прямая  $O\gamma'$  будет перпендикулярна к  $ab$ . Точка  $\gamma'$  определится как подошва перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на линию  $ab$ .

Чтобы построить вторую основную окружность  $H_0$ , предположим, что одним

из указанных способов для лучей  $Oa$  и  $Ob$  мы построим точку  $\gamma'$ . Точка  $\gamma$  определится пересечением прямой  $A\gamma'$  с прямой  $O\gamma$ , проведенной через  $O$  параллельно линии  $ab$ , соединяющей концы лучей  $Oa$  и  $Ob$ . Прямая, проведенная через  $\gamma$  и параллельная  $O\gamma'$ , встретит лучи  $Oa$  и  $Ob$  в точках  $a'$  и  $b'$ , которые и будут концами лучей на окружности  $H_0$ . Окружность  $H_0$  определится тремя точками  $O, a', b'$ .

**Задача 8.** Даны: основная окружность, основная линия и направление асимптоты; построить изображение трех точек строфоиды, лежащих на одной прямой линии.

А. Даны изображения двух точек  $a, b$ , найти изображение третьей  $c$ . Эта задача решается на основании теоремы VII предыдущего параграфа. Определим точку  $C_0$ , в которой прямая  $ab$  пересекается с осью  $y$ . Точка пересечения  $C_0t_0$  с окружностью  $D_0$  будет точкой  $1/c$ . Прямая проведенная через  $1/c$  параллельно оси  $y$  встретит окружность в точке  $c$ .

В. Дано изображение одной точки  $c$  и направление прямой  $ABC$ , найти изображение двух других точек  $a$  и  $b$ . Проведем через  $O$  и  $c$  прямые  $O\theta$  и  $cc'$  параллельно данному направлению  $ABC$ ; построим точку  $1/c$  и определим точку  $C_0$ , в которой прямая  $(t_0, 1/c)$  пересекает ось  $y$ . Прямая  $ab$  должна пройти через точку  $C_0$  (теорема II, § 3) и быть параллельна прямой  $(\theta, 1/c)$  или  $D_0c'$  (теорема I, § 3).

**Задача 9.** Даны: основная окружность, основная линия и одна точка  $C$  строфоиды. Надо определить точки пересечения строфоиды с прямой, проведенной через точку  $C$ .

А. Построим на луче  $Oc$  окружность. Данная прямая встретит эту окружность  $Oc$  в точке  $\alpha'$  и  $\beta'$ . Прямая  $c\alpha'$  пересечет окружность  $D_0$  в точке  $b$ , а прямая  $c\beta'$  — в точке  $a$ . Проекции точек  $a$  и  $b$  из  $O$  на данную прямую и будут точками пересечения ее со строфоидой.

В. Пусть лучи  $O\alpha'$  и  $O\beta'$  пересекают окружность  $D_0$  в точках  $a'$  и  $b'$ . Прямые, проведенные через  $a'$  и  $b'$  параллельно данной прямой, встретят окружность  $D_0$  в точках  $a$  и  $b$ . Проекции этих последних на данную прямую из точки  $O$  и будут искомыми точками пересечения ее со строфоидой.

§ 6. Уравнение второе теоремы I, § 4, дает возможность легко получить уравнение строфоиды. Примем касательные к основным окружностям за оси координат. Эти оси будут, вообще говоря, косоугольны, угол между ними мы обозначаем  $\vartheta$ . Построив координаты точки  $A$  строфоиды и пользуясь обозначениями § 4, имеем:

$$\frac{y}{\rho} = \frac{\sin \varphi}{\sin \vartheta}, \quad \frac{x}{\rho} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \vartheta},$$

и уравнение второе принимает вид

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{D_0 y} + \frac{1}{H_0 x},$$

или

$$(x^2 + y^2 + 2xy \cos \vartheta)(H_0 x + D_0 y) = D_0 H_0 xy \quad (1)$$

Докажем следующую теорему:

**Теорема.** Основные окружности представляют собой круги кривизны для двойной точки  $O$  двух ветвей через нее проходящих.

Для доказательства разложим ординату точки, лежащей на той ветви строфоиды, которая касается оси  $x$  в ряд по степеням  $x$

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \dots$$

Подставляя этот ряд в уравнение кривой, получаем:

$$(x^2 + \alpha^2 x^2 + 2\alpha \cos \vartheta x^2 + \dots)(H_0 x + D_0 \alpha x + \dots) = D_0 H_0 x(\alpha x + \beta x^2 + \dots),$$

откуда

$$D_0 H_0 \alpha = 0, \quad D_0 H_0 \beta = (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \vartheta)(H_0 + D_0 \alpha),$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{D_0}$$

и

$$y = \frac{x^2}{D_0} + \dots$$

С другой стороны, замечая, что окружность  $D_0$  касается оси  $x$  в начале координат и проходит через точку  $D_0(0, D_0)$ , напишем уравнение окружности  $D_0$

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \vartheta - D_0 y = 0 \quad (2)$$

и разложим ординату  $y$  по степеням  $x$

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \dots,$$

$$x^2 + \alpha^2 x^2 + 2\alpha \cos \vartheta x^2 + \dots - D_0(\alpha x + \beta x^2 + \dots) = 0.$$

Отсюда

$$D_0 \alpha = 0, \quad 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \vartheta = + D_0 \beta,$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{D_0}$$

$$y = \frac{x^2}{D_0} + \dots$$

Из полученных двух рядов мы видим, что разность ординат двух точек, из которых одна лежит на строфоиде, а другая—на окружности  $D_0$ , соответствующих одной и той же абсциссе, будет величиной третьего порядка. Поэтому касание строфоиды и окружности будет второго порядка, и окружность  $D_0$  будет кругом кривизны для рассматриваемой ветви кривой. Так же докажем, что окружность  $H_0$  будет кругом кривизны для другой ветви строфоиды, проходящей через  $O$  и касающейся оси  $Oy$ .

Строфоида есть циркулярная кривая, т. е. она проходит через мнимые круговые точки. Мнимые касательные в этих точках пересекаются в действительной точке, которая называется фокусом строфоиды и находится в пересечении двух действительных прямых

$$(H_0 - D_0 \cos \vartheta)x + (H_0 \cos \vartheta - D_0)y = 0. \quad (3)$$

$$D_0 x + H_0 y = \frac{D_0 H_0}{2 \sin^2 \vartheta}. \quad (4)$$

Из этих уравнений вытекает такое построение фокуса. Через центр основной окружности  $D_0$  проведем прямую, параллельную оси  $x$ , до пересечения с осью  $y$  в точке  $M$  и через центр окружности  $H_0$  — линию, параллельную оси  $y$ , до пересечения с осью  $x$  в точке  $L$ . Уравнение прямой  $LM$  будет (4). Подошва перпендикуляра (уравнение 3), опущенного из начала координат на эту прямую, и будет фокусом строфоиды.

По аналогии с уравнением (2) напомним уравнение окружности  $H_0$ :

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \vartheta - H_0 x = 0. \quad (5)$$

Из уравнений (2) и (5) мы получаем уравнение радикальной оси окружностей

$$H_0 x = D_0 y \quad (6)$$

и уравнение прямой  $t_0 O t'_0$ , параллельной асимптоте

$$H_0 x + D_0 y = 0. \quad (7)$$

Угловой коэффициент последней, который мы обозначим той же буквой  $t_0$ , как и точку пересечения прямой  $t_0 O t'_0$  с основной окружностью  $D_0$ , равен

$$t_0 = -\frac{H_0}{D_0},$$

откуда

$$H_0 = -D_0 t_0. \quad (8)$$

Если мы подставим это выражение  $H_0$  в уравнение строфоиды (1), то оно примет вид

$$(x^2 + y^2 + 2xy \cos \vartheta)(y - t_0 x) + D_0 t_0 xy = 0. \quad (9)$$

В это уравнение, кроме угла между осями,  $\vartheta$ , входят два параметра  $D_0$  и  $t_0$ . Второй представляет собой величину отвлеченную, а первый — величину линейную и входит в уравнение в первой степени, причем уравнение однородно по отношению к  $D_0$ ,  $x$ ,  $y$ . Это обстоятельство указывает, что при данном угле  $\vartheta$  форма строфоиды будет определяться величиной  $t_0$ , а размеры — величиной  $D_0$ , или, говоря точнее, все строфоиды, соответствующие одному и тому же значению  $t_0$  и различающиеся величиной  $D_0$ , будут между собой подобны, и центром их подобия будет начало координат.

Если основные окружности  $D_0$  и  $H_0$  ортогональны, то  $\vartheta = 90^\circ$  и координатные оси  $xOy$  будут прямоугольны. Уравнение строфоиды в этом случае принимает вид

$$(x^2 + y^2)(H_0 x + D_0 y) = D_0 H_0 xy \quad (10)$$

или

$$(x^2 + y^2)(y - t_0 x) + D_0 t_0 xy = 0 \quad (11)$$

или

$$(x^2 + y^2)(y - t_0 x) - H_0 xy = 0. \quad (12)$$

Фокус строфоиды лежит в точке пересечения радикальной оси основных окружностей с прямой, соединяющей их центры, и совпадает с подошвой перпендикуляра, опущенного из начала на эту прямую.

Подставив координаты фокуса

$$x_0 = \frac{H_0 D_0^2}{2(H_0^2 + D_0^2)}, \quad y_0 = \frac{D_0 H_0^2}{2(H_0^2 + D_0^2)},$$

которые получим, решая уравнения (3) и (4), в уравнение (10), убеждаемся, что фокус лежит на строфоиде.

Направление радикальной оси и направление асимптоты симметричны относительно оси  $y$ . Если через фокус проведем прямую, параллельную асимптоте, то двойная точка будет лежать посередине между этой линией и асимптотой.

§ 7. Наш метод изучения свойств точек Бурместра основан на преобразованиях строфоиды в другие более простые линии. Мы будем пользоваться различными преобразованиями и некоторые из них теперь рассмотрим.

Для решения задачи найти точку пересечения строфоиды с прямой линией мы в главе IV подвергнем их преобразованию посредством обратных радиусов векторов. При таком преобразовании строфоиды переходят в гиперболу.

Другое преобразование заключается в следующем. Проведем через начало координат окружность, касающуюся оси  $x$ . Такая окружность пересечется как со строфоидой, так и с осью  $y$  только в одной точке и установит, таким образом, соответствие между точками строфоиды и оси  $y$  (см. следствие теоремы VI, § 3). Через каждую точку оси  $y$  и через каждую точку строфоиды можно провести только одну такую окружность, и потому каждой точке оси  $y$  будет соответствовать только одна точка строфоиды и обратно. Это преобразование дает нам одно очень удобное построение для фигуры, играющей в дальнейшем большую роль и получающейся следующим преобразованием 2 порядка, при котором строфоиды переходят в окружность.

Пусть нам даны координатные оси  $xOy$  и направление  $Ol_0$ . Возьмем произвольную точку  $a$ , через нее проведем прямую  $aa_x$ , параллельную оси  $y$ , до пересечения с осью  $x$  в точке  $a_x$ , и через  $a_x$  — прямую, параллельную  $Ol_0$ , до пересечения с лучом  $Oa$  в точке  $A$ . Точку  $A$  будем называть соответствующей точке  $a$  и точку  $a$  — изображением точки  $A$ . Таким образом для каждой точки плоскости мы можем построить точку ей соответствующую и для каждой точки плоскости найти ее изображение.

Сравнивая это построение с решением  $A$  задачи 1, § 5, мы видим, что оно преобразует основную окружность в строфоиду. Обратным построением строфоиды преобразуется в окружность. Докажем это еще раз помощью аналитической геометрии.

Найдем зависимость между координатами точки  $A$  ( $x, y$ ) и координатами ее изображения  $a$  ( $\xi, \eta$ ). Координаты точки  $a_x$  равны  $\xi, 0$ , и уравнение прямой  $aa_x$ , параллельной лучу  $Ol_0$ , будет  $y = t_0(x - \xi)$ , если через  $t_0$  обозначим угловой коэффициент прямой  $Ol_0$ . Координаты точки  $A$  должны удовлетворять кроме этого уравнения еще уравнению прямой  $Oa: x\eta - y\xi = 0$ , и следовательно

$$x = \frac{t_0 \xi}{t_0 \xi - \eta} \xi, \quad y = \frac{t_0 \xi}{t_0 \xi - \eta} \eta \tag{1}$$

или

$$\xi = \frac{1}{t_0} (t_0 x - y), \quad \eta = \frac{y}{t_0 x} (t_0 x - y). \tag{2}$$



Если теперь вместо координат точки  $A(x, y)$  мы подставим в уравнение строфоиды (9) § 6 их выражения через координаты точки  $a(\xi, \eta)$ , то получим уравнение окружности  $D_0$ :

$$\xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos \vartheta - D_0\eta = 0.$$

Таким образом, строфоида преобразуется в окружность.

**Задача.** Дана основная окружность, основная линия и направление асимптоты. Найти точки пересечения данной прямой со строфоидой. Это—задача третьего порядка, и она может быть сведена, как сейчас увидим, к определению точек пересечения основной окружности с гиперболой.

Преобразуем строфоиду и данную прямую посредством формул (1). Мы уже знаем, что строфоида перейдет в основную окружность  $D_0$ ; данная прямая

$$y = mx + n$$

преобразуется в гиперболу,

$$t_0\xi(\eta - m\xi) + n(\eta - t_0\xi) = 0;$$

точки же пересечения строфоиды с прямой перейдут в точки пересечения окружности  $D_0$  с гиперболой. Эта последняя легко может быть построена.

Она встречается с осью  $x$  в двух точках  $\xi = 0$ ,  $\xi = -n/m$ . Первая лежит в начале координат, а вторая совпадает с точкой пересечения данной прямой с осью  $x$ . Асимптоты гиперболы определяются уравнением

$$t_0\xi + n = 0, \quad t_0(\eta - m\xi) + n(m - t_0) = 0.$$

Первая параллельна оси  $y$  и встречает ось  $x$  в той же точке, в которой ось  $x$  пересекает прямая, проведенная через конец начальной ординаты данной прямой  $(0, n)$  параллельно лучу  $Ot_0$ . Вторая параллельна данной прямой, и ее точку пересечения с осью  $x$  легко можно построить, пользуясь известным свойством гиперболы отсекал на каждой прямой равные отрезки, заключенные между гиперболой и ее асимптотами.

Построив гиперболу, определяем ее точки пересечения с основной окружностью. Это будут изображения точек пересечения строфоиды с данной прямой, спроектировав их из начала координат на эту последнюю, мы получим точки пересечения ее со строфоидой.

### § 8. Рассмотрим еще одно преобразование строфоиды.

Пусть нам даны прямоугольные координатные оси  $xOy$ . Опустим из точки  $n(\xi, \eta)$  перпендикуляры  $nP$  и  $nQ$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ , соединим подошвы их прямой линией  $PQ$  и опустим из точки  $O$  перпендикуляр  $ON$  на  $PQ$ . Подошву этого перпендикуляра, точку  $N$ , и прямую  $PQ$  будем называть соответствующими точке  $n$ .

Таким образом по точке  $n$  можно найти точку  $N$  и прямую  $PQ$ . Обратно, зная точку  $N$  или прямую  $PQ$ , легко построить точку  $n$ , которой они соответствуют.

Координаты точки  $N(x, y)$  должны удовлетворять уравнениям прямых  $PQ$  и  $ON$ :

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} = 1, \quad x\xi - y\eta = 0$$

и следовательно

$$x = \frac{\xi\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\xi^2\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

откуда

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2},$$

и затем

$$\xi = \frac{x^2 + y^2}{x}, \quad \eta = \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

Если точка  $n(\xi, \eta)$  будет перемещаться по прямой ( $\lambda$ )

$$\frac{\xi}{H_0} + \frac{\eta}{D_0} = 1, \quad (\lambda)$$

соединяющей основные точки  $D_0$  и  $H_0$ , то точка  $N(x, y)$  будет описывать кривую

$$\frac{x^2 + y^2}{x} \cdot \frac{1}{H_0} + \frac{x^2 + y^2}{y} \cdot \frac{1}{D_0} = 1$$

или

$$(x^2 + y^2)(D_0y + H_0x) = D_0H_0xy,$$

т. е. строфоиду. Итак при указанном преобразовании — прямая  $\lambda$  переходит в строфоиду.

Если точка  $n_0(\xi, \eta)$  будет перемещаться по прямой ( $\lambda_0$ )

$$\frac{2\xi}{H_0} + \frac{2\eta}{D_0} = 1, \quad (\lambda_0)$$

соединяющей центры основных окружностей, то соответствующая ей прямая  $P_0Q_0$  будет всегда касаться некоторой параболы.

Действительно, ряды, образованные точками  $P_0$  и  $Q_0$  на осях  $x$  и  $y$ , будут проективны и прямые  $P_0Q_0$  образуют пучок второго порядка, которому очевидно принадлежит и бесконечно удаленная прямая. Огибающая этого пучка будет, следовательно, параболой ( $\nu_0$ ). Уравнение ее

$$\left(H_0x - D_0y + \frac{H_0D_0}{2}\right)^2 - 2D_0H_0x = 0$$

легко получить, определяя огибающую семейства прямых  $P_0Q_0$

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} = 1,$$

где  $\xi$  и  $\eta$  связаны уравнением прямой ( $\lambda_0$ ).

Оси  $x$  и  $y$  касаются параболы в центрах основных окружностей. Так как оси взаимно перпендикулярны, то точка  $O$  их пересечения лежит на директрисе параболы: директриса параболы проходит через двойную точку строфоиды.

Прямая ( $\lambda_0$ ) будет полярной точки  $O$  по отношению к параболы, и потому перпендикуляр, опущенный из начала координат на прямую ( $\lambda_0$ ) пересечет ее в фокусе  $F_0$  параболы: фокус параболы совпадает с фокусом строфоиды.

Известно, что касательная, проведенная из какой-нибудь точки директрисы делит пополам угол между директрисой и прямой, соединяющей точку с фокусом. Поэтому директриса параболы ( $\gamma_0$ ) будет параллельна асимптоте строфоиды.

Итак, мы имеем такую теорему:

**Теорема I.** Точкам прямой ( $\lambda$ ) соответствуют точки строфоиды, точкам прямой ( $\lambda_0$ ) соответствуют прямые пучка второго порядка, огибающей которому служит парабола ( $\gamma_0$ ). Ее фокус совпадает с фокусом строфоиды, а директриса проходит через двойную точку строфоиды и параллельна ее асимптоте.

Отметим на прямой, проведенной через начало координат, точки  $n_0$  и  $n$  (фиг. 15), в которых она пересекается с прямыми ( $\lambda_0$ ) и ( $\lambda$ ), и построим точки  $N_0$  и  $N$ , им соответствующие. Очевидно, что точка  $n_0$  лежит посередине отрезка  $On$ , точка  $P_0$  — посередине отрезка  $OP$  и точка  $Q_0$  — посередине отрезка  $OQ$ , и линии  $P_0Q_0$  и  $PQ$ , соответствующие точкам  $n_0$  и  $n$ , параллельны. Поэтому точки  $N_0$  и  $N$  также будут лежать на одной прямой перпендикулярной к общему направлению прямых  $P_0Q_0$  и  $PQ$  и  $N_0$  будет посередине отрезка  $ON$ . Точка  $N$ , которая, как мы знаем, находится на строфоиде, будет отражением точки  $O$  в прямой  $P_0Q_0$ , касающейся параболы ( $\gamma_0$ ).

Центр круга, описанного на  $P_0Q_0$  как на диаметре, находится в пересечении диагоналей прямоугольника  $OP_0n_0Q_0$ . Этот круг пройдет через точки  $O, n_0, F_0$  (ибо прямой угол  $OF_0n_0$  опирается на диаметр  $On_0$ ) и через точку  $N$  (ибо  $N$  есть отражение точки  $O$  в диаметре  $P_0Q_0$ ). Сказанное резюмируем такой теоремой.

**Теорема II.** Строфоида представляет собой геометрическое место отражений точки  $O$  в касательных к параболе ( $\gamma_0$ ). Отрезки касательных, заключенные между осями, служат диаметрами окружностям, проходящим через двойную точку и фокус строфоиды. Обратно, диаметры окружностей, проходящих через двойную точку и фокус строфоиды, заключенные между осями, касаются параболы ( $\gamma_0$ ).

§ 9. Напишем уравнение прямой

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} = 1 \quad \text{или} \quad y = x \operatorname{tg} \theta + M, \quad (1)$$

где  $\eta = M$ ,  $\xi = -M \operatorname{ctg} \theta$ , и уравнение строфоиды в полярных координатах  $r, \varphi$  —

$$\begin{aligned} r \sin(\varphi - \theta) &= M \cos \theta, \\ r(H_0 \cos \varphi + D_0 \sin \varphi) &= D_0 H_0 \cos \varphi \sin \varphi, \end{aligned}$$

и разделив одно на другое, исключим из них  $r$ . Мы получим уравнение:

$$\frac{D_0}{H_0} = \frac{D_0 \sin 2\varphi \sin(\varphi - \theta) - 2M \cos \theta \cos \varphi}{2M \cos \theta \sin \varphi} \quad (2)$$



Сравнивая это уравнение с (5) и принимая во внимание, что  $Oa = D_0 \sin \varphi$ , мы получаем  $OK = 2M$ . Независимость этого результата от угла  $\varphi$  показывает нам, что все три высоты треугольника  $abc$  пройдут через одну и ту же точку  $K$  оси  $y$ , ордината которой вдвое больше начальной ординаты секущей прямой.

Таким образом, если секущая касается параболы  $(\nu_0)$ , то изображения  $a, b, c$  трех точек пересечения  $A, B, C$  образуют треугольник, высоты которого пересекаются в точке, лежащей на оси  $y$ .

Обратно, допустим, что изображения  $a, b, c$  трех точек  $A, B, C$ , в которых прямая (1) пересекается со строфоидой, обладают указанным сейчас свойством. Докажем, что в этом случае секущая прямая касается параболы  $(\nu_0)$ .

В самом деле, вследствие того, что  $\vartheta = 90^\circ$ , отрезки  $Oa, Ob, Oc$  служат диаметрами окружностей, построенных на лучах  $Oa, Ob, Oc$  по отношению к основной линии  $Oy$ , и центры этих окружностей  $P, Q, R$  лежат посередине отрезков  $Oa, Ob, Oc$  и образуют треугольник  $PQR$ , подобный треугольнику  $abc$ , при чем центром подобия служит точка  $O$ . Поэтому точка  $S$  пересечения высот треугольника  $PQR$  и точка  $K$  пересечения высот треугольника  $abc$  лежат на одной прямой с  $O$ , и  $S$  находится посередине отрезка  $OK$  на линии  $\sigma$  треугольника  $abc$  (теорема III, 7, § 2). По предположению, точка  $K$  находится на оси  $Oy$ . Рассматривая треугольник  $OaK$ , мы получаем так же, как и раньше, уравнение (6). Но теперь точка  $S$  также лежит на оси  $y$  и совпадает с точкой пересечения линии  $\sigma$  с осью  $Oy$ . Ее ордината равна, следовательно, начальной ординате  $M$  линии  $\sigma$ , а ордината точки  $K$ ,  $OK = 2M$ , и уравнение (6) делается тождественным с уравнением (5). Но из (5) и (2) вытекает (3), которое показывает, что секущая прямая (1) касается параболы  $(\nu_0)$ .

**Теорема I.** Для того чтобы точка пересечения высот треугольника  $abc$ , вершины которого представляют изображения трех точек пересечения строфоиды с прямой  $\sigma$  лежала на оси  $y$ , необходимо и достаточно, чтобы секущая прямая касалась параболы  $(\nu_0)$ .

При соблюдении этого условия ордината точки пересечения высот вдвое больше начальной ординаты секущей.

Предположим попрежнему, что прямая (1) касается параболы  $(\nu_0)$ , так что мы имеем уравнения (3) и (5). Пусть  $r, \varphi$  — полярные, а  $x$  и  $y$  — прямоугольные координаты одной из точек  $A, B, C$ . Так как эти точки лежат на прямой (1), то

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi = M \frac{\cos \theta}{\sin(\varphi - \theta)} \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi = M \frac{\cos \theta}{\sin(\varphi - \theta)} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Проведем через начало координат прямую  $y = \operatorname{ctg} \theta \cdot x$ , направление которой симметрично с направлением секущей по отношению к биссектрисам угла  $xOy$ . Она пересечет строфоиду в точке  $T_0$ . Координаты ее

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{2MD_0}{4M - D_0} \sin \theta \cos \theta = W_0 \sin \theta \cos \theta, \\ y_0 &= \frac{2MD_0}{4M - D_0} \cos^2 \theta = W_0 \cos^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $W_0$  связано с  $M$  и  $D_0$  соотношением

$$\frac{1}{2M} + \frac{1}{W_0} = \frac{2}{D_0},$$

мы получаем, решая совместно уравнение строфоиды с уравнением прямой  $y = \operatorname{ctg} \theta \cdot x$  и заменяя на основании уравнения (3)  $H_0$  через

$$\frac{MD_0 \operatorname{ctg} \theta}{2M - D_0}.$$

Если из уравнения (5) мы определим  $2M$

$$2M = \frac{D_0 \sin \varphi \sin(2\varphi - \theta)}{\cos(\varphi - \theta)}$$

и подставим это значение в знаменателе  $W_0$ , то получим:

$$W_0 = \frac{2MD_0}{4M - D_0} = -\frac{2M \cos(\varphi - \theta)}{\cos(3\varphi - \theta)}. \quad (9)$$

Пользуясь этими формулами, вычислим  $\operatorname{tg} OAT_0$ . Замечая, что угловой коэффициент прямой  $AT_0$  равен

$$\frac{y - y_0}{x - x_0},$$

а угловой коэффициент  $OA$  равен  $\operatorname{tg} \varphi$ , имеем:

$$\operatorname{tg} OAT_0 = \frac{(y - y_0) \cos \varphi - (x - x_0) \sin \varphi}{(y - y_0) \sin \varphi + (x - x_0) \cos \varphi}.$$

При помощи формул (7), (8) и (9) после преобразований получаем:

$$(y - y_0) \cos \varphi - (x - x_0) \sin \varphi = \frac{M \cos \theta \cos(\varphi + \theta) \sin 2(\varphi - \theta)}{\cos(3\varphi - \theta) \sin(\varphi - \theta)},$$

$$(y - y_0) \sin \varphi + (x - x_0) \cos \varphi = \frac{M \cos \theta \cos(\varphi + \theta) \cos 2(\varphi - \theta)}{\cos(3\varphi - \theta) \sin(\varphi - \theta)}$$

и

$$\operatorname{tg} OAT_0 = \operatorname{tg} 2(\varphi - \theta),$$

и следовательно

$$OAT_0 = 2\sigma AO.$$

Так же докажем, что  $OBV_0 = 2\sigma BO$ ,  $OCT_0 = 2\sigma CO$ .

**Теорема II.** Пусть прямая  $\sigma$ , касательная к параболе  $(\nu_0)$ , пересекает строфоиду в трех точках  $A, B, C$ , и прямая  $OT_0$ , направление которой симметрично с направлением линии  $\sigma$  по отношению к биссектрисам угла  $xOy$ , встречает строфоиду в точке  $T_0$ . Между углами мы имеем равенства

$$2\sigma AO = OAT_0, \quad 2\sigma BO = OBV_0, \quad 2\sigma CO = OCT_0. \quad (10)$$

Построим на отрезке прямой  $\sigma$ , заключенном между осями, как на диаметре окружность. Так как  $\sigma$  по предположению касается параболы  $(\nu_0)$ , то окружность пройдет не только через двойную точку строфоиды, но и через фокус ее, и не-

трудно видеть, что угол между прямой  $\sigma$  и осью  $y$  будет измеряться той же дугой окружности, как и угол между касательной к окружности в точке  $O$  и осью  $x$ . Поэтому касательная пересечет строфоиду в точке  $T_0$ , о которой говорится в предыдущей теореме, и мы можем ее формулировать следующим образом.

**Теорема II.** *Проведем окружность через двойную точку и фокус строфоиды. Пусть диаметр окружности  $\sigma$ , заключенный между осями [касательная к параболе ( $\gamma_0$ )], пересекает строфоиду в трех точках  $A, B, C$ , и касательная к окружности в точке  $O$  пересекает строфоиду в точке  $T_0$ . Между углами мы имеем соотношение (10).*

## Г Л А В А II.

**§ 10.** Пусть подвижная плоскость движется по неподвижной. В неподвижной плоскости проведены координатные оси  $\xi O_1 \eta$ , в подвижной — оси  $x O y$ . Координаты  $(x, y)$  какой-нибудь точки  $M$  относительно подвижных осей и координаты  $(\xi, \eta)$  той же точки относительно осей неподвижных связаны между собой уравнениями

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ \eta &= \eta_0 + x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$  есть угол между осями  $Ox$  и  $O_1\xi$ ,  $\xi_0$  и  $\eta_0$  — координаты подвижного начала  $O$  относительно неподвижных осей.

Координаты  $\xi_0$  и  $\eta_0$  и угол  $\varphi$ , которыми определяется положение подвижной плоскости по отношению к неподвижной, суть некоторые функции времени.

Если точка  $M$  неизменно связана с подвижной плоскостью, то ее координаты  $x$  и  $y$  будут постоянны. Если же точка  $M$  движется относительно подвижной плоскости, то ее координаты  $(x, y)$  будут также функциями времени. Производные их по времени определяют проекции ее относительной скорости и относительных ускорений различных порядков на оси  $x O y$ . Абсолютную скорость и абсолютные ускорения точки  $M$  по отношению к неподвижным осям  $\xi O_1 \eta$  и их проекции на подвижные оси  $x O y$  мы обозначим через  $v(v_x, v_y)$ ,  $j(j_x, j_y)$ ,  $j_2(j_{2x}, j_{2y}), \dots$ . Для того чтобы их определить, заметим следующее. Пусть проекции некоторого вектора  $R$ , изменяющегося по величине и по направлению, на подвижные оси суть  $X$  и  $Y$ . Если бы мы провели через какую-нибудь неподвижную точку вектор, геометрически равный этому вектору  $R$ , то скорость конца его представляла бы собой геометрическую производную вектора  $R$ . Проекции этой производной на подвижные оси, на основании известной теоремы кинематики, были бы равны  $X' - \omega Y$ ,  $Y' - \omega X$ , где  $\omega$  есть угловая скорость вращения подвижной системы координат по отношению к неподвижной,  $\omega = d\varphi/dt$ .

В ряду векторов  $v, j, j_2, j_3, \dots$  каждый следующий представляет собой геометрическую производную предыдущего и потому мы имеем формулы:

$$\begin{aligned} j_x &= v'_x - \omega v_y, & j_{2x} &= j'_x - \omega j_y, & j_{3x} &= j'_{2x} - \omega j_{2y}, \dots, \\ j_y &= v'_y + \omega v_x, & j_{2y} &= j'_y + \omega j_x, & j_{3y} &= j'_{2y} + \omega j_{2x}, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

которые дают возможность вычислить проекции всех абсолютных ускорений на оси  $x O y$ , если будут известны проекции  $v_x$  и  $v_y$  абсолютной скорости. Эта последняя, на основании известной теоремы кинематики складывается из двух скоростей:

скорости переносного движения, проекции которой на оси координат равны  $-\omega(y - y_c)$ ,  $\omega(x - x_c)$ , где  $x_c$  и  $y_c$  суть координаты мгновенного центра вращения движущейся плоскости, и скорости относительного движения точки  $M(x', y')$ . Таким образом:

$$\begin{aligned} v_x &= -\omega(y - y_c) + x', \\ v_y &= \omega(x - x_c) + y'. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя эти выражения  $v_x$  и  $v_y$  в предыдущие формулы, мы получаем:

$$\begin{aligned} j_x &= -\omega'(y - y_c) - \omega^2(x - W_x) - 2\omega y' + x'', \\ j_y &= \omega'(x - x_c) - \omega^2(y - W_y) + 2\omega x' + y'', \\ j_{2x} &= \omega^3(y - W_{1y}) + \dots, & j_{2y} &= -\omega^3(x - W_{1x}) + \dots, \\ j_{3x} &= \omega^4(x - W_{2x}) + \dots, & j_{3y} &= \omega^4(y - W_{2y}) + \dots, \\ j_{4x} &= -\omega^5(y - W_{3y}) + \dots, & j_{4y} &= \omega^5(x - W_{3x}) + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} W_x &= x_c + \frac{y'_c}{\omega}, & W_{1x} &= W_x + \frac{W'_y}{\omega}, & W_{2x} &= W_{1x} + \frac{W''_{1y}}{\omega}, & W_{3x} &= W_{2x} + \frac{W'''_{2y}}{\omega}, \dots \\ W_y &= y_c - \frac{x'_c}{\omega}, & W_{1y} &= W_y - \frac{W'_x}{\omega}, & W_{2y} &= W_{1y} - \frac{W''_{1x}}{\omega}, & W_{3y} &= W_{2y} - \frac{W'''_{2x}}{\omega}, \dots \end{aligned}$$

и точками обозначены члены, содержащие множителем по крайней мере одну из производных  $\omega'$ ,  $\omega''$ , ...,  $x'$ ,  $y'$ ,  $x''$ ,  $y''$ , ...

В этих формулах  $x_c$ ,  $y_c$  означают координаты мгновенного центра.

Величины  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_{1x}$ ,  $W_{1y}$ , ... мы будем в дальнейшем рассматривать также как координаты точек, которые мы будем обозначать буквами  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $W_2$ , ... Эти точки определяются геометрическими, а не кинематическими свойствами движения плоскости, или, точнее говоря, определяются исключительно видом траекторий, которые описывают точки подвижной плоскости на неподвижной, и несколько не зависят от закона движения их по траекториям.

Действительно, величины  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  и  $\varphi$ , которыми по формулам (1) определяется движение плоскости  $xOy$ , суть некоторые функции времени. Мы можем представить себе, что  $\xi_0$  и  $\eta_0$  выражены через  $\varphi$ , а затем уже  $\varphi$  выражено через время. Тогда ясно, что уравнения траекторий точек движущейся плоской фигуры, уравнения, которые мы получаем, исключая из (1) угол  $\varphi$ , совершенно не будут зависеть от  $\varphi$  как функции времени, а будут только определяться выражениями  $\xi_0$  и  $\eta_0$  через  $\varphi$ . Только этими выражениями будут вполне характеризоваться геометрические свойства рассматриваемого движения. Только от них и их производных по  $\varphi$ , но не от  $\varphi$  как функции времени и не от производных от  $\varphi$  по времени будут зависеть координаты  $x_c$ ,  $y_c$  мгновенного центра и, как показывают формулы

$$\begin{aligned} W_x &= x_c + \frac{y'_c}{\omega} = x_c + \frac{dy_c}{d\varphi}, \\ W_y &= y_c - \frac{x'_c}{\omega} = y_c - \frac{dx_c}{d\varphi}, \\ W_{1x} &= W_x + \frac{W'_y}{\omega} = x_c + 2 \frac{dy_c}{d\varphi} - \frac{d^2x_c}{d\varphi^2}, \\ W_{1y} &= W_y - \frac{W'_x}{\omega} = y_c - 2 \frac{dx_c}{d\varphi} - \frac{d^2y_c}{d\varphi^2}, \end{aligned} \quad (6)$$



$$\begin{aligned}
 W_{2x} &= W_{1x} + \frac{W'_{1y}}{\omega} = x_c + 3 \frac{dy_c}{d\varphi} - 3 \frac{d^2x_c}{d\varphi^2} - \frac{d^3y_c}{d\varphi^3}, \\
 W_{2y} &= W_{1y} - \frac{W'_{1x}}{\omega} = y_c - 3 \frac{dx_c}{d\varphi} - 3 \frac{d^2y_c}{d\varphi^2} + \frac{d^2x_c}{d\varphi^2}, \\
 W_{3x} &= W_{2x} + \frac{W'_{2y}}{\omega} = x_c + 4 \frac{dy_c}{d\varphi} - 6 \frac{d^2x_c}{d\varphi^2} - 4 \frac{d^3y_c}{d\varphi^3} + \frac{d^4x_c}{d\varphi^4}, \\
 W_{3y} &= W_{2y} - \frac{W'_{2x}}{\omega} = y_c - 4 \frac{dx_c}{d\varphi} - 6 \frac{d^2y_c}{d\varphi^2} + 4 \frac{d^3x_c}{d\varphi^3} + \frac{d^4y_c}{d\varphi^4},
 \end{aligned} \tag{7}$$

и координаты точек  $W_0, W_1, W_2, W_3$ . Эти точки будут определяться только геометрическими элементами движения.

Замечу, что формулы (6) и (7) могут быть представлены в более сжатом виде: если мы обозначим:

$$z_c = x_c + iy_c, \quad W_0 = W_x + iW_y, \quad W_1 = W_{1x} + iW_{1y}, \quad W_2 = W_{2x} + iW_{2y}, \\
 W_3 = W_{3x} + iW_{3y},$$

то

$$\begin{aligned}
 W_0 &= z_c - iz'_c, & W_1 &= z_c - 2iz'_c + i^2z''_c, & W_2 &= z_c - 3iz'_c + 3i^2z''_c - i^3z'''_c, \\
 W_3 &= z_c - 4iz'_c + 6i^2z''_c - 4i^3z'''_c + i^4z^{IV}_c
 \end{aligned}$$

или символически:

$$W_1 = W_0^2, \quad W_2 = W_0^3, \quad W_3 = W_0^4.$$

**§ 11.** Займемся сначала выводом некоторых следствий из формул (3), (4), предварительно придав им другую форму.

Пусть  $j_0$ —абсолютное ускорение начала  $O$  подвижной системы. Проекция его на оси подвижные мы получим по формулам (4), положив в них:

$$\begin{aligned}
 x = y = x' = y' = x'' = y'' = 0, \\
 j_{ox} = \omega'y_c + \omega^2W_x, \quad j_{oy} = -\omega'x_c + \omega^2W_y.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Вводя эти проекции в формулы (4), мы приведем их к виду:

$$\begin{aligned}
 j_x &= j_{ox} - \omega'y - \omega^2x - 2\omega y' + x'', \\
 j_y &= j_{oy} + \omega'x - \omega^2y + 2\omega x' + y''.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Проекция скорости и ускорения какой-нибудь точки  $M(x, y)$ , принадлежащей движущейся плоскости, мы получим по формулам (3) § 10 и (2), если будем считать в них  $x$  и  $y$  постоянными и производные их равными нулю:

$$v_x = -\omega'(y - y_c), \quad v_y = \omega'(x - x_c), \tag{3}$$

$$j_x = j_{ox} - \omega'y - \omega^2x, \quad j_y = j_{oy} + \omega'x - \omega^2y. \tag{4}$$

Условимся называть вектор  $j/\omega^2$ , равный ускорению какой-нибудь точки  $M(x, y)$ , деленный на квадрат угловой скорости и отложенный от точки  $M$  по направлению ускорения  $j$ , редуцированным ускорением точки  $M$ .

**Теорема I.** *Окружность, построенная на редуцированном ускорении какой-нибудь точки как на диаметре, проходит через центр ускорений.*

Действительно, координаты центра ускорений  $(x_0, y_0)$  определяются уравнениями.

$$j_{ox} - \omega'y_0 - \omega^2x_0 = 0, \quad j_{oy} + \omega'x_0 - \omega^2y_0 = 0.$$

Умножая их на  $x_g$  и  $y_g$  соответственно и складывая, мы получаем ур.

$$-\frac{j_{ox}}{\omega^2}x_g - \frac{j_{oy}}{\omega^2}y_g + x_g^2 + y_g^2 = 0,$$

которое показывает, что центр ускорений лежит на окружности, описанной на редуцированном ускорении начала координат как на диаметре. Так как начало координат выбрано произвольно, то теорему можно считать доказанной для любой точки плоскости.

**Теорема II.** *Концы редуцированного ускорения той точки подвижной плоскости, с которой совпадает в рассматриваемый момент мгновенный центр, находится в точке  $W_0$ .*

Для доказательства этой теоремы возьмем начало координат  $O$  таким образом, чтобы в рассматриваемый момент мгновенный центр совпадал с  $O$ . В таком случае  $x_c = y_c = 0$ , и формулы (1) обращаются в

$$\frac{j_{ox}}{\omega^2} = W_x, \quad \frac{j_{oy}}{\omega^2} = W_y.$$

Из них вытекает теорема, ибо  $j_{ox}/\omega^2$  и  $j_{oy}/\omega^2$  суть координаты конца редуцированного ускорения точки  $O$ .

**Теорема III.** *Линия, соединяющая концы редуцированных ускорений двух точек, перпендикулярна к прямой, соединяющей эти две точки.*

Действительно, разделив уравнение (4) на  $\omega^2$ , мы получим для координат конца редуцированного ускорения точки  $M(x, y)$  выражения:

$$\frac{j_x}{\omega^2} + x = \frac{j_{ox}}{\omega^2} - \frac{\omega'}{\omega^2}y, \quad \frac{j_y}{\omega^2} + y = \frac{j_{oy}}{\omega^2} + \frac{\omega'}{\omega^2}x.$$

Вычитая из них координаты конца редуцированного ускорения точки  $O$   $\left(\frac{j_{ox}}{\omega^2}, \frac{j_{oy}}{\omega^2}\right)$ , умножая разности соответственно на  $x$  и на  $y$  и складывая, получим равенство:

$$\left(\frac{j_y}{\omega^2} + x - \frac{j_{ox}}{\omega^2}\right)x + \left(\frac{j_x}{\omega^2} + y - \frac{j_{oy}}{\omega^2}\right)y = 0,$$

которое показывает, что линия, соединяющая концы редуцированных ускорений точек  $O$  и  $M$ , перпендикулярна к  $OM$ .

**Следствие.** Концы редуцированных ускорений точек, лежащих на прямой линии, лежат также на прямой перпендикулярной к первой.

**Теорема IV.** *Концы редуцированных ускорений точек прямой линии, проходящей через мгновенный центр, лежат на прямой, проходящей через  $W_0$  и перпендикулярной к первой.*

Эту теорему можно рассматривать как следствие двух предыдущих.

Ее можно вывести непосредственно из уравнения (1), если мы предположим, что ось  $y$  проходит через мгновенный центр, так что  $x_c = 0$ . Тогда уравнение (1) дает нам:

$$\frac{j_{oy}}{\omega^2} = W_y. \tag{5}$$

Первая часть этого уравнения есть проекция на ось  $y$  редуцированного ускорения точки  $O$ , вторая же часть есть координата  $y$  точки  $W_0$ , и равенство показывает, что конец редуцированного ускорения точки  $O$  лежит на перпендикуляре, опущенном из точки  $W_0$  на ось  $y$ . Таким образом, принимая во внимание, что точка  $O$  может быть выбрана на оси  $y$  произвольно, мы видим, что равенство (5) и выражает собой теорему.

**§ 12. Теорема I.** *Если точку  $M$  соединим прямой с мгновенным центром, через точку  $W_0$  проведем прямую, перпендикулярную к первой, то полюс последней относительно окружности, описанной из точки  $M$  радиусом, равным расстоянию ее от мгновенного центра, будет центром кривизны для траектории точки  $M$ .*

Предположим снова, что ось  $y$  проходит через мгновенный центр и начало координат совпадает с точкой  $M$ . В этом предположении  $x_c = 0 = x = y$ , и формулы (3) § 10 и (1) § 11 дают нам:

$$v_x = \omega y_c, \quad v_y = 0, \quad j_{oy} = \omega^2 W_y.$$

Так как ось  $y$  служит нормалью к траектории точки  $M$ , то

$$j_{oy} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 y_c^2}{\rho},$$

где  $\rho$  радиус кривизны для точки  $M$ , причем этому радиусу мы должны приписать знак в зависимости от положения центра кривизны на оси  $y$ . Подставляя это значение  $j_{oy}$  в предыдущую формулу, мы получаем равенство:

$$y_c^2 = \rho \cdot W_y, \tag{1}$$

которое и доказывает теорему, ибо  $y_c^2$  есть квадрат радиуса круга, о котором говорится в теореме,  $W_y$  есть расстояние от центра этого круга (точки  $M$ ) до прямой, проведенной через  $W_0$  и перпендикулярной к оси  $y$ , а абсолютное значение  $\rho$  — расстояние точки  $M$  от центра кривизны.

Если начало координат перенесем в мгновенный центр и обозначим через  $r$  новую ординату точки  $M$ , через  $\rho$  — новую ординату центра кривизны и через  $W_y$  — новую ординату точки  $W_0$ , то мы должны будем в последнем уравнении заменить  $y_c$  через  $-r$ ,  $\rho$  через  $\rho - r$  и  $W_y$  через  $W_y - r$ . Мы получим:

$$r^2 = (\rho - r)(W_y - r)$$

или

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{W_y}. \tag{2}$$

Прежде чем мы займемся рассмотрением геометрического значения этого уравнения, которым обыкновенно пользуются при построении центров кривизны рулетт, мы покажем, что оно имеет более общее значение.

Вообразим себе какую-нибудь кривую  $K$ , начерченную на движущейся плоскости и движущуюся вместе с этой последней. При своем движении кривая  $K$  будет касаться неподвижной кривой  $L$ , огибающей различные положения, которые будет занимать кривая  $K$  во время своего движения. Задача наша будет заключаться в том, чтобы найти зависимость между радиусами кривизны кривых  $K$  и  $L$  в их

точке касания. Чтобы решить эту задачу, представим себе точку  $M$ , которая, двигаясь по подвижной плоскости, описывает на ней кривую  $K$  так, что она (точка  $M$ ) во все время своего движения всегда совпадает с той точкой кривой  $K$ , в которой эта кривая касается своей огибающей  $L$ . Кривая  $K$  будет относительной траекторией точки  $M$ , а кривая  $L$  — абсолютной. Так как кривые  $K$  и  $L$  касаются в точке  $M$ , то относительная и абсолютная скорости точки  $M$  будут лежать на общей касательной к этим кривым в точке  $M$  и, следовательно, во все время движения мы будем иметь:

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{x'}{y'} \quad \text{или} \quad y'v_x - x'v_y = 0,$$

где, как и раньше,  $v_x$  и  $v_y$  суть проекции абсолютной скорости точки  $M$ , а  $x'$  и  $y'$  — относительной ее скорости на подвижные оси  $xOy$ .

Дифференцируя это уравнение по времени и принимая во внимание, что

$$v'_x = j_x + \omega v_y, \quad v'_y = j_y - \omega v_x,$$

мы получаем:

$$\begin{aligned} -v_y x'' + v_x y'' - v'_y x' + v'_x y' &= 0, \\ -v_y x'' + v_x y'' - x'(j_y - \omega v_x) + y'(j_x + \omega v_y) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

К этому уравнению мы присоединяем формулы (3) § 10 и вторую из формул (2) § 11

$$v_x = -\omega(y - y_c) + x', \quad v_y = \omega(x - x_c) + y', \quad (4)$$

$$j_y = j_{oy} + \omega'x - \omega^2 y + 2\omega x' + y''. \quad (5)$$

Чтобы упростить разыскание искомой зависимости, возьмем подвижные оси таким образом, чтобы в рассматриваемый момент точка  $M$  проходила через начало координат  $O$  и ось  $x$  совпала бы с общей касательной к кривым  $K$  и  $L$ , а ось  $y$  — с общей нормалью. Тогда  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y' = 0$ ,  $v_y = 0$  и уравнения (3), (4), (5) примут вид:

$$v_x = \omega y_c + x', \quad x_c = 0, \quad (6)$$

$$j_y = j_{oy} + 2\omega x' + y'', \quad (7)$$

$$v_x y'' - x' j_y + \omega v_x x' = 0. \quad (8)$$

Второе уравнение (6) показывает, что общая нормаль к кривым  $K$  и  $L$  проходит через мгновенный центр.

Обозначим через  $r$  и  $A$  радиус и центр кривизны кривой  $K$ , через  $\rho$  и  $\Lambda$  радиус и центр кривизны, огибающей  $L$  для точки касания  $M$ , и условимся считать  $r$  и  $\rho$  положительными, если соответствующие им центры лежат на положительной оси  $y$ , и отрицательными — в противном случае, иначе говоря, обозначим через  $r$  и  $\rho$  ординаты центров кривизны  $A$  и  $\Lambda$ . Тогда по известной формуле кинематики мы будем иметь:

$$y'' = \frac{x'^2}{r}, \quad j_y = \frac{v_y^2}{\rho},$$

причем эти формулы будут верны и в отношении знака. Подставляя эти выражения  $y''$  и  $j_y$  в уравнения (7) и (8), мы получим:

$$\frac{x'}{r} - \frac{v_x}{\rho} + \omega = 0, \quad (9)$$

$$\frac{v_x^2}{\rho} - \frac{x'^2}{r} = j_{oy} + 2\omega x'. \quad (10)$$

Определим из уравнений (6) и (9)  $x'$  и  $r_x$ ,

$$x' = \omega r \frac{y_c - \rho}{\rho - r}, \quad v_x = \omega \rho \frac{y_c - r}{\rho - r}$$

и, подставив их значения в уравнение (10), после преобразований найдем:

$$\frac{1}{r - y_c} - \frac{1}{\rho - y_c} = \frac{1}{j_{oy}/\omega^2 - y_c}$$

или, так как  $j_{oy}/\omega^2 = W_y$ ,

$$\frac{1}{r - y_c} - \frac{1}{\rho - y_c} = \frac{1}{W_y - y_c}. \quad (11)$$

Если бы мы перенесли начало координат в мгновенный центр  $(0, y_c)$ , обозначили бы через  $r$  и  $\rho$  новые координаты центров кривизны  $A$  и  $A$ , абсолютные величины которых теперь будут равны расстояниям центров кривизны от мгновенного центра, через  $W_y$  — новую ординату точки  $W_0$ , т. е. ортогональную проекцию на ось  $y$  вектора, соединяющего мгновенный центр с точкой  $W_0$ , то уравнение приняло бы вид:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{W_y} \quad (12)$$

и сделалось бы тождественным с уравнением (2). Но теперь это уравнение дает нам зависимость не между радиусами кривизны движущейся кривой и ее огибающей, а между расстояниями центров кривизны этих линий от мгновенного центра. Из него исчезли величины, определяющие положение точки  $M$ , так что соотношение остается неизменным, где бы на общей нормали ни находилась точка касания кривых. Точка  $M$  может совпасть с центром  $A$  кривизны кривой  $K$ . Тогда движущаяся кривая обратится в точку, ее огибающая — в траекторию этой точки, и та же формула (12) будет иметь тот смысл, который она имела выше, и будет определять зависимость между расстоянием точки и расстоянием центра кривизны ее траектории от мгновенного центра.

Таким образом мы имеем следующую теорему:

**Теорема II.** *Центр кривизны огибающей совпадает с центром кривизны траектории той точки подвижной плоскости, которая в рассматриваемый момент совпадает с центром кривизны движущейся кривой.*

Предположим теперь, что точка  $M$  всегда совпадает с мгновенным центром. В этом случае ее относительной траекторией  $K$  будет подвижная центроида, а абсолютной  $L$  — центроида неподвижная. Формула (11) остается справедливой, причем теперь  $y_c = 0$  и она обращается в (12), где  $r$  и  $\rho$  обозначают радиусы кривизны подвижной и неподвижной центроид, взятые с надлежащим знаком.

Возьмем оси  $xOy$  так, чтобы в рассматриваемый момент мгновенный центр (точка  $M$ ) проходила через  $O$ ; тогда  $x = y = x_c = y_c = 0$ ,  $x' = x'_c$ ,  $y' = y'_c$ , и уравнения (2) § 10 обращаются в

$$v_x = x'_c, \quad v_y = y'_c.$$

Они показывают, что относительная и абсолютная скорости мгновенного центра равны и центроиды касаются в мгновенном центре. Если ось  $x$  направим по общей к центроидам касательной, то  $y'_c = 0$  и по формуле (5) § 10 имеем:

$$W_x = 0, \quad W_y = -\frac{x'_c}{\omega}.$$

При указанном расположении осей, когда начало находится в мгновенном центре, ось  $x$  идет по общей касательной, ось  $y$ —по общей нормали к центроидам, ординату точки  $W_0$ , лежащей, как показывают последние формулы, на оси  $y$ , мы всегда будем обозначать буквой  $W_0$ . Она равна отношению скорости движения мгновенного центра к угловой скорости, взятому с обратным знаком.

§ 13. Связь, которую уравнение (12) § 12 устанавливает между ординатами  $r$ ,  $\rho$ ,  $w_y$  точки  $A$ , соответствующего ей центра кривизны  $A$  и точки  $W_0$ , можно весьма просто представить в геометрической форме.

Если мы будем рассматривать  $r$  как величину постоянную и  $\rho$  и  $w_y$ —как переменные, то уравнение (12) § 12, будучи симметрично и первой степени по отношению к  $\rho$  и  $W_y$ , определит на оси  $y$  инволюцию. При  $\rho = W_y$  оно обращается в

$$\rho^2 = 2\rho r,$$

откуда

$$\rho = W_y = 0, \quad \rho = W_y = 2r.$$

При  $\rho = \infty$ , мы получаем  $W_y = r$ . Таким образом мы имеем четыре пары соответствующих точек инволюции:

$$(O, O), \quad (2r, 2r), \quad (\infty, r), \quad (\rho, W_y).$$

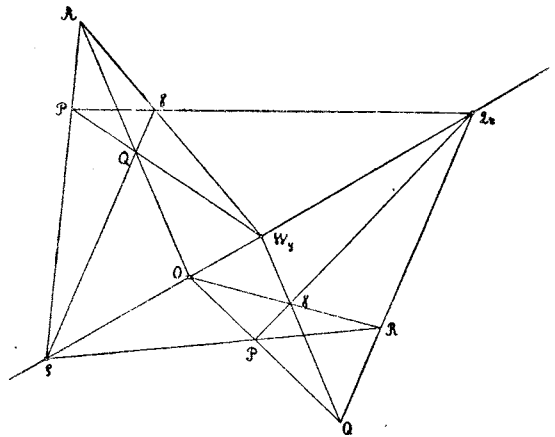
Точки  $O, 2r$ —двойные точки инволюции.

Для того чтобы установить геометрическую зависимость между точками  $O, \rho, r, W_y$ , достаточно взять три пары.

1. Возьмем пары  $(O, O), (2r, 2r), (\rho, W_y)$ . По свойству инволюции двойные точки  $O, 2r$  и пара  $(\rho, W_y)$  образуют гармоническую систему, и мы можем поэтому утверждать, что

а) существует полный четырехугольник  $P, Q, R, \gamma$ , у которого две противоположные стороны  $PQ, R\gamma$  проходят через точку  $O$ , две противоположные стороны  $QR, P\gamma$  проходят через точку  $2r$ , одна сторона  $PR$ —через  $\rho$  и одна сторона  $Q\gamma$ —через  $W_y$  (фиг. 17);

б) существует полный четырехугольник  $P, Q, R, \gamma$ , у которого две противоположные стороны  $PR, Q\gamma$  проходят через  $\rho$ , две противоположные стороны  $PQ, R\gamma$  проходят через  $W_y$ , одна сторона  $QR$ —через  $O$  и одна сторона  $P\gamma$ —через  $2r$  (фиг. 17).



Фиг. 17.

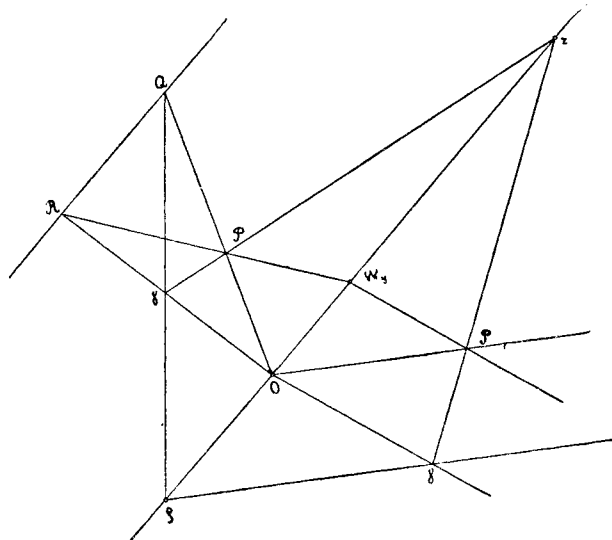
Такие четырехугольники мы можем построить, зная три из четырех точек  $O, 2r, \rho, W_y$ , и таким образом определить четвертую.

2. Возьмем пары  $(O, O), (\infty, r), (\rho, W_y)$ . На основании свойств инволюции мы можем утверждать, что существует полный четырехугольник  $P, Q, R, \gamma$  (фиг. 18), у которого две противоположные стороны  $PQ, R\gamma$  проходят через точку  $O$ , две противоположные стороны  $PR, Q\gamma$ —одна через  $\rho$ , другая—через  $W_y$  и две противоположные стороны расположены так, что одна  $P\gamma$  проходит через  $r$ , а другая  $QR$  через бесконечно удаленную точку оси  $y$ , т. е. параллельна оси.

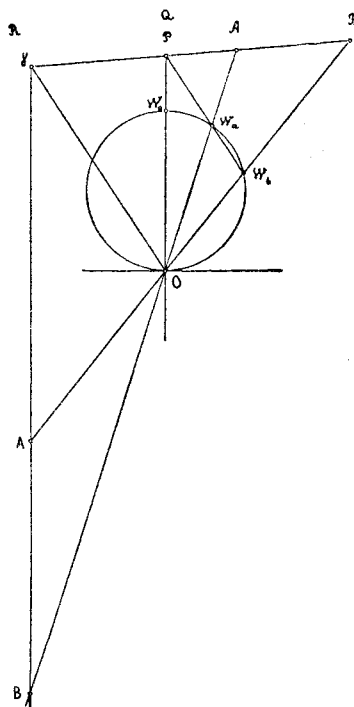
По данной точке  $O$  и двум из трех  $q, r, W_y$  мы можем построить такой четырехугольник и определить четвертую.

3. Если мы в построении 2) предположим, что точки  $R$  и  $Q$  удаляются по прямым  $O\gamma$  и  $OP$  в бесконечность, то прямая  $OP$  становится параллельной с прямой  $q\gamma$ , а прямая  $O\gamma$  — параллельной с прямой  $PW_y$ , и наш четырехугольник обращается в ту фигуру, которой обычно пользуются при построении центра кривизны рулетты (фиг. 18).

Возьмем две точки  $A$  и  $B$  (фиг. 19) движущейся плоскости и пусть  $A$  и  $B$  — соответствующие им центры кривизны. Определим точки пересечения прямых  $AA$  и  $BB$  и прямых  $AB$  и  $AB$ . Первая точка,  $O$ , будет мгновенным центром, вторую,  $\gamma$ , соединим с первой прямой  $O\gamma$ . Через  $O$  проведем прямую  $OP$ , параллельную с  $AB\gamma$  до пересечения с прямой  $AB\gamma$  в точке  $P$  и вообразим на прямой  $O\gamma$  бесконечно удаленную точку  $R$ , и на прямой  $OP$  — бесконечно удаленную точку  $Q$ . Мы будем иметь четырехугольник  $P, Q, R, \gamma$ , у которого две противоположные стороны  $PQ$  и  $\gamma R$  проходят через  $O$ , две противоположные стороны  $QR$  и  $P\gamma$  — одна



Фиг. 18.



Фиг. 19.

через бесконечно удаленные точки прямых  $AA$  и  $BB$ , другая — через точки  $A$  и  $B$ , пятая  $Q\gamma$  через точки  $A$  и  $B$ . На основании построения 3, шестая сторона  $PR$ , т. е. прямая, проведенная через точку  $P$  параллельно прямой  $O\gamma$ , пересечет прямые  $AA$  и  $BB$  в точках  $W_a$  и  $W_b$ , которые будут проекциями точки  $W_0$  на эти прямые. Точки пересечения перпендикуляров к  $AA$  и  $BB$ , восставленных в точках  $W_a$  и  $W_b$ , будет точкой  $W_0$ , и окружность описанная на  $OW_0$  как на диаметре, называемая окружностью перегиба, пройдет через точки  $W_a$  и  $W_b$ .

К этой окружности проведем касательную  $Ox$ . Из чертежа видно, что  $xOA = OW_b W_a = BO\gamma$  вследствие параллельности прямых  $W_a W_b$  с  $O\gamma$ . Отсюда следует, что направление  $O\gamma$  зависит только от направления лучей  $OA$  и  $OB$ , но не зависит от положения точек  $A$  и  $B$  на этих лучах. Линия  $O\gamma$  называется осью лучей  $OA$  и  $OB$  и определяется тем условием, что она располагается симметрично с касательной  $Ox$  к кругу перегиба по отношению к лучам  $OA$  и  $OB$  (теорема Bobiller).

Г Л А В А III.

§ 14. Предположим, что точка  $M$  принадлежит движущейся плоскости, что ее координаты  $x, y$  остаются постоянными и производные их  $x' = y' = x'' = y'' = \dots = 0$ .

Будем называть касательную, центр, радиус и круг кривизны траектории, описываемой точкой  $M$  для той точки этой траектории, через которую  $M$  в рассматриваемый момент проходит, просто касательной, центром, радиусом и кругом кривизны для точки  $M$ .

Движение точки  $M(x, y)$  по отношению к неподвижным осям  $\xi O_1 \eta$  будет определяться уравнениями  $\xi = f_1(t), \eta = f_2(t)$ , которые мы получим из уравнений (1) § 10, выразив в них  $\xi_0, \eta_0$  и  $\varphi$  через время  $t$ .

Мы можем рассматривать эти уравнения как уравнения траектории точки  $M$  в параметрической форме. Если выражения координат в функции времени подставим в уравнение круга

$$(\xi - a)^2 + (\eta - b) = R^2 \quad (1)$$

и продифференцируем его несколько раз по  $t$ , то получим

$$\xi' (\xi - a) + \eta' (\eta - b) = 0, \quad (2)$$

$$\xi'' (\xi - a) + \eta'' (\eta - b) + \xi'^2 + \eta'^2 = 0, \quad (3)$$

$$\xi''' (\xi - a) + \eta''' (\eta - b) + 3(\xi' \xi'' + \eta' \eta'') = 0, \quad (4)$$

$$\xi^{IV} (\xi - a) + \eta^{IV} (\eta - b) + 4(\xi' \xi''' + \eta' \eta''') + 3(\xi''^2 + \eta''^2) = 0, \quad (5)$$

$$\xi^V (\xi - a) + \eta^V (\eta - b) + 5(\xi' \xi^{IV} + \eta' \eta^{IV}) + 10(\xi'' \xi''' + \eta'' \eta''') = 0. \quad (6)$$

Известно, что первые три уравнения (1), (2), (3) служат для определения круга кривизны; из них мы найдем координаты центра  $a, b$  и радиус  $R$ .

Круг кривизны вообще имеет касание 2 порядка и проходит через три бесконечно близкие точки траектории. Если же при найденных значениях  $a, b$  и  $R$  будет удовлетворяться еще и уравнение (4), то круг кривизны пройдет через 4 бесконечно близкие точки траектории и будет иметь касание 3 порядка.

Если кроме того будет удовлетворяться еще и уравнение (5), то круг кривизны будет иметь касание 4 порядка и пройдет через 5 бесконечно близких точек.

Наконец, если для точки  $M$  будут иметь место все 6 уравнений, то круг кривизны пройдет через 6 бесконечно близких точек и будет иметь касание 5 порядка.

Точку  $M$  мы условимся называть точкой 2, 3 порядка, если соответствующий ей круг кривизны имеет касание 2, 3 и т. д. порядка.

В этих ур.  $\xi', \eta', \xi'', \eta'', \dots$  суть проекции на неподвижные оси  $\xi O_1 \eta$  абсолютной скорости и абсолютных ускорений различных порядков точки  $M$ .

Для того чтобы упростить определение этих проекций, предположим, что в рассматриваемый момент оси  $xOy$  совпадают с осями  $\xi O_1 \eta$ . Тогда  $\xi = x, \eta = y, \xi' = v_x, \eta' = v_y, \xi'' = j_x, \eta'' = j_y, \xi''' = j_{2x}, \eta''' = j_{2y}, \xi^{IV} = j_{3x}, \eta^{IV} = j_{3y}, \xi^V = j_{4x}, \eta^V = j_{4y}$  и искомые проекции определяются формулами (3), (4), (5) § 10. Эти последние мы можем значительно упростить, пользуясь следующим замечанием.

Выше было упомянуто, что вид траекторий точек движущейся плоскости и положение точек  $W_0, W_1, W_2, W_3$  зависит только от выражений  $\xi_0, \eta_0$  через  $\varphi$ ,



но не зависит от того, какой функцией времени будет угол  $\varphi$ . Поэтому, не нарушая общности наших исследований, мы можем значительно упростить выкладки, если положим  $\varphi = \omega t$  и будем считать угловую скорость  $\omega$  величиной постоянной и  $\omega' = \omega'' = \omega''' = 0$ . В этом предположении будем иметь

$$\begin{aligned} \xi' = v_x &= -\omega(y - y_c), \quad \xi'' = j_x = -\omega^2(x - W_x), \quad \xi''' = j_{1x} = \omega^3(y - W_{1y}), \\ \xi^{IV} &= j_{2x} = \omega^4(x - W_{2x}), \quad \xi^V = j_{3x} = -\omega^5(y - W_{3y}), \\ \eta' = v_y &= \omega(x - x_c), \quad \eta'' = j_y = -\omega^2(y - W_y), \quad \eta''' = j_{2y} = -\omega^3(x - W_{1x}), \\ \eta^{IV} &= j_{2y} = \omega^4(y - W_{2y}), \quad \eta^V = j_{3y} = \omega^5(x - W_{3x}). \end{aligned}$$

Первые три формулы упростятся надлежащим выбором подвижных осей  $xOy$ . Мы будем эти оси всегда брать таким образом, чтобы в рассматриваемый момент мгновенный центр проходил через начало координат, ось  $x$  шла по общей касательной и ось  $y$  по общей нормали к центроидам. Тогда в предыдущих формулах  $x_c = y_c = 0$ ,  $W_x = 0$ ,  $W_y = W_0$ .

После указанных упрощений мы подставим  $\xi, \eta, \xi', \eta', \dots$  в уравнения (1), (2), (3), (4), (5) и (6) и получим

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \quad (1')$$

$$ay - bx = 0, \quad (2')$$

$$W_0(y - b) + ax + by = 0, \quad (3')$$

$$A_1(x - a) + B_1(y - b) - a_0x = 0, \quad (4')$$

$$A_2(x - a) + B_2(y - b) - (a_1x + b_1y + c_1) = 0, \quad (5')$$

$$A_3(x - a) + B_3(y - b) - (a_2x + b_2y + c_2) = 0, \quad (6')$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= W_{1y}, \quad A_2 = W_{2x}, \quad A_3 = W_{3y}, \\ B_1 &= -W_{1x}, \quad B_2 = W_{2y} - W_0, \quad B_3 = -W_{3x}, \\ \alpha_0 &= 3W_0, \\ \alpha_1 &= 4W_{1x}, \quad b_1 = 4W_{1y} - 6W_0, \quad c_1 = 3W_0^2, \\ \alpha_2 &= 5W_{2y} - 10W_{1y} + 10W_0, \quad b_2 = -5W_{2x} + 10W_{1x}, \quad c_2 = -10W_0W_{1x} \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнений (2') и (3') мы находим разности

$$x - a = \frac{r^2}{\psi} x, \quad y - b = \frac{r^2}{\psi} y,$$

где

$$\psi = r^2 - W_0y, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Подставляя значения  $x - a$  и  $y - b$  в последние 3 уравнения (4'), (5'), (6') мы приведем их к виду

$$r^2(A_1x + B_1y) - \psi a_0x = 0, \quad (4'')$$

$$r^2(A_2x + B_2y) - \psi(a_1x + b_1y + c_1) = 0, \quad (5'')$$

$$r^2(A_3x + B_3y) - \psi(a_2x + b_2y + c_2) = 0. \quad (6'')$$

**§ 15.** Первые три ур. (1'), (2'), (3') § 14 определяют для данной точки  $M(x, y)$  соответствующий ей центр  $(a, b)$  и радиус кривизны  $R$ .

Из (2') и (3') мы находим

$$\begin{aligned} a &= -\frac{W_0 x y}{r^2 - W_0 y}, \quad b = -\frac{W_0 y^2}{r^2 - W_0 y}, \\ x &= \frac{W_0 a b}{\varrho^2 + W_0 b}, \quad y = \frac{W_0 b^2}{\varrho^2 + W_0 b}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\varrho^2 = a^2 + b^2.$$

Если точка  $M$  будет лежать на круге перегиба

$$r^2 - W_0 y = 0, \quad (2)$$

то  $a$  и  $b$  сделаются бесконечно большими, и круг кривизны обратится в касательную, имеющую соприкосновение 2 порядка, а сама точка  $M$  будет совпадать с точкой перегиба своей траектории.

**Теорема I.** *Точки, для которых круги кривизны обращаются в касательные, имеющие соприкосновение второго порядка (или выше), лежат на круге перегиба.*

С другой стороны, если мы будем искать те точки плоскости, которым соответствуют центры кривизны, расположенные на круге

$$\varrho^2 + W_0 b = 0, \quad (3)$$

то мы найдем для их координат бесконечно большие значения.

Принимая во внимание теорему II § 12, мы заключаем, что точки этого круга служат центрами кривизны для огибающих прямые линии, начерченные на движущейся плоскости. Круг (2) симметричен с кругом перегиба (2) относительно оси  $x$  и носит название круга возврата.

**Теорема II.** *Центры кривизны огибающих прямые линии, начерченные на движущейся плоскости, лежат на круге возврата.*

§ 16. Уравнение (4'') § 14, которое мы перепишем таким образом:

$$[(A_1 - a_0)x + B_1 y]r^2 + c_1 xy = 0, \quad (1)$$

или

$$[(W_{1y} - 3W_0)x - W_{1y}]r^2 + 3W_0^2 xy = 0 \quad (2)$$

содержит только координаты точки  $M$  и не содержит координат  $(a, b)$  центра кривизны. Оно определяет строфоиду, которую мы будем называть строфойдой  $S$ . Для точек этой кривой круги кривизны будут иметь соприкосновение третьего порядка.

Центры кривизны, соответствующие точкам этой строфоиды, расположены на другой строфоиде, уравнение которой

$$\varrho^2(A_1 a + B_1 b) + c_1 ab = 0 \quad (3)$$

или

$$\varrho^2(W_{1y} a - W_{1x} b) + 3W_0^2 ab = 0, \quad (4)$$

мы получим, если в уравнение (1) или (2) вместо координат точки  $M(x, y)$  подставим их выражения (1) § 15 через координаты соответствующего центра кривизны. Эту строфоиду мы будем называть строфойдой  $\Sigma$ .

**Теорема I.** Для точек строфоиды  $S$  круга кривизны имеют касание 3 порядка. Соответствующие им центры кривизны находятся на другой строфоиде  $\Sigma$ .

Точки пересечения строфоиды  $S$  с кругом перегиба, не совпадающие с мгновенным центром и бесконечно-удаленными циклическими точками, называются точками Валл'а.

Существует, вообще говоря, одна и только одна точка Валл'а, ибо круг перегиба касается строфоиды в двойной точке, и из 6 точек пересечения его со строфоидой две совпадают с бесконечно удаленными циклическими точками, три с мгновенным центром и только одна будет точкой Валл'а.

Из ур. (4'') § 14 видно, что точка пересечения круга перегиба (2) § 15 со строфоидой  $S$  лежит на прямой

$$A_1x + B_1y = 0$$

или

$$W_{1y}x - W_{1x}y = 0 \tag{5}$$

или

$$y = \tau_0 x, \quad \text{где } \tau_0 = \frac{W_{1y}}{W_{1x}}, \tag{6}$$

так что точка Валл'а находится в пересечении трех линий: строфоиды, круга перегиба и прямой, соединяющей мгновенный центр с точкой  $W_1$ .

Так как точка Валл'а лежит на строфоиде, то на основании предыдущей теоремы ей будет соответствовать круг кривизны, проходящий через 4 бесконечно близкие точки. С другой стороны, круг кривизны для нее, как находящейся на круге перегиба по теореме I § 15, будет иметь бесконечно большой радиус и обращается в касательную прямую.

Итак мы имеем теорему.

**Теорема II.** Точка Валл'а лежит в пересечении строфоиды  $S$ , круга перегиба и прямой, соединяющей мгновенный центр с точкой  $W_1$ . Касательная для точки Валл'а имеет соприкосновение 3 порядка.

Строфоиды  $\Sigma$  пересекаются кругом возврата в точке, которую мы будем обозначать буквой  $T_0$ . Исключая  $\rho^2$  из уравнений (3) § 15 и (4) § 16, находим, что точка  $T_0$  лежит на прямой

$$W_{1x}b - (W_{1y} - 3W_0)a = 0 \tag{7}$$

или

$$b = t_0 a, \quad \text{где } t_0 = \frac{W_{1y} - 3W_0}{W_{1x}}. \tag{8}$$

**Теорема III.** Точка  $T_0$  лежит на пересечении строфоиды  $\Sigma$ , круга возврата и прямой, соединяющей мгновенный центр с точкой  $W_1 - 3W_0$ .

§ 17. Займемся теперь рассмотрением некоторых свойств строфоид  $S$  и  $\Sigma$  и фигур, образованных их основными окружностями, кругом перегиба, точкой Валл'а, т. е. вообще теми геометрическими элементами, которые определяются положением мгновенного центра и точек  $W_0$  и  $W_1$ .

Сравнивая уравнение строфоиды  $S$  (2) § 16 с общим уравнением строфоиды (10) § 6, мы получаем для определения диаметров  $D_0$  и  $H_0$  основных окружностей строфоиды  $S$  пропорции

$$\frac{W_{1y} - 3W_0}{H_0} = - \frac{W_{1x}}{D_0} = - \frac{3W_0^2}{D_0 H_0},$$

откуда

$$D_0 = -\frac{3W_0^2}{W_{1y} - 3W_0}, \quad H_0 = \frac{3W_0^2}{W_{1x}}. \quad (1)$$

Уравнение строфоиды  $S$  мы можем представить в виде

$$(x^2 + y^2)(y - l_0 x) + D_0 l_0 xy = 0, \quad (2)$$

где

$$l_0 = \frac{W_{1y} - 3W_0}{W_{1x}} \quad (3)$$

есть угловой коэффициент асимптоты строфоиды и связан с  $D_0$  и  $H_0$  равенством

$$H_0 = -D_0 l_0. \quad (4)$$

Подобным же образом для определения диаметров  $\Delta_0$  и  $H_0$  строфоиды  $\Sigma$  (4) § 16 имеем пропорции

$$\frac{W_{1y}}{\Delta_0} = -\frac{W_{1x}}{H_0} = -\frac{3W_0^2}{\Delta_0 H_0},$$

откуда

$$\Delta_0 = -\frac{3W_0^2}{W_{1y}}, \quad H_0 = \frac{3W_0^2}{W_{1x}}. \quad (5)$$

Уравнение строфоиды  $\Sigma$  мы можем представить в виде

$$(x^2 + y^2)(y - \tau_0 x) + \Delta_0 \tau_0 xy = 0, \quad (6)$$

где

$$\tau_0 = \frac{W_{1y}}{W_{1x}} \quad (7)$$

— угловой коэффициент асимптоты строфоиды  $\Sigma$  и связан с  $\Delta_0$  и  $H_0$  равенством

$$H_0 = -\Delta_0 \tau_0. \quad (8)$$

Заметим, что в предыдущих формулах  $D_0$ ,  $\Delta_0$ ,  $H_0$  представляют собой не абсолютные величины диаметров, а координаты  $x$  или  $y$  концов диаметров, лежащих на оси  $x$  или на оси  $y$ . Эти концы и основные окружности мы будем обозначать теми же буквами  $D_0$ ,  $\Delta_0$ ,  $H_0$ .

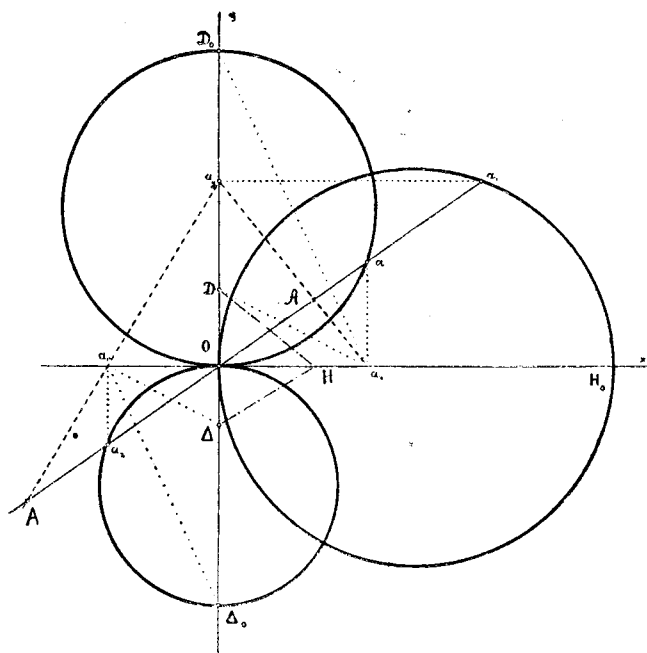
Сравнивая формулы (3) и (7) с (6) и (8) § 16, мы видим, что прямая, соединяющая мгновенный центр с точкой Ball'a,  $T_0$ , параллельна асимптоте строфоиды  $\Sigma$ , а прямая, соединяющая мгновенный центр с точкой  $T_0$ , параллельна асимптоте строфоиды  $S$ .

Из формул (1) и (5) мы выводим следующее заключение:

**Теорема I.** *Строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  имеют общую основную окружность  $H_0$ , касающуюся оси  $y$ . Две другие основные окружности  $D_0$  и  $\Delta_0$ , касательные к оси  $x$ , не равны.*

**Следствие I.** Построим на каком-нибудь луче  $Oa$  как для строфоиды  $S$ , так и для строфоиды  $\Sigma$ , параллелограмм, о котором говорится в теореме II § 4. Теперь

эти параллелограммы обратятся в прямоугольники, у которых будет общая сторона  $Oa_y$ , лежащая на оси  $Oy$ ; две другие стороны их, лежащие на оси  $x$ , будут пропорциональны диаметрам  $D_0$  и  $\Delta_0$  (фиг. 20).



Фиг. 20.

**Следствие 2.** Построим для двух лучей  $Oa$  и  $Ob$  как для строфоиды  $S$ , так и для строфоиды  $\Sigma$ , параллелограммы, о которых говорится в теореме III § 4. Эти параллелограммы теперь обратятся в прямоугольники, у которых общая сторона  $Oy$  идет по оси лучей  $Oa$  и  $Ob$  по отношению к оси  $x$ ; а две стороны, перпендикулярные к  $Oy$ , будут пропорциональны диаметрам  $D_0$  и  $\Delta_0$  (фиг. 21).

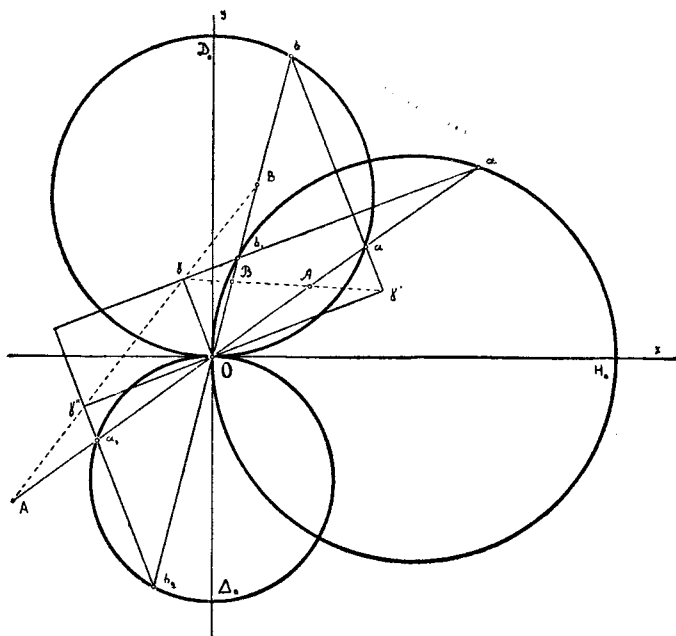
**Следствие 3,** аналогичное предыдущим двум, можно вывести из теоремы IV § 4.

**Задача 1.** По одной из основных окружностей  $D_0$ ,

$\Delta_0$  или  $H_0$  и направлениям  $t_0$  и  $\tau_0$  асимптот строфоид  $S$  и  $\Sigma$  построить точки  $A$  и  $A'$  строфоид  $S$  и  $\Sigma$ , лежащие на данном луче  $Oa$  (фиг. 20).

Пусть дана основная окружность  $H_0$ , общая обоим строфоидам  $S$  и  $\Sigma$ . Определим точку  $a_1$  пересечения луча  $Oa$  с окружностью  $H_0$ . Через  $a_1$  проведем линию, параллельную оси  $x$ , до пересечения с осью  $y$  в точке  $a_y$  и через  $a_y$  две прямые, параллельные асимптотам строфоид; эти прямые пересекут луч  $Oa$  в искомых точках  $A$  и  $A'$ .

Пусть дана основная окружность  $D_0$  строфоиды  $S$ . Определяем конец  $a$  луча  $Oa$  на этой окружности. Через  $a$  проводим линию, параллельную оси  $y$ , до пересечения с осью



Фиг. 21.

$x$  в точке  $a_x$  и через  $a_x$  — прямую, параллельную асимптоте строфоиды  $S$ . Эта прямая пересечет луч  $Oa$  в точке  $A$ , а ось  $y$  в точке  $a_y$ . Прямая, про-

веденная через  $a_y$  параллельно асимптоте строфоиды  $\Sigma$ , пересечет луч  $Oa$  в точке  $A$ .

Подобным же образом решается задача и в том случае, когда нам дана основная окружность  $\Delta_0$ .

**Задача 2.** По двум соответствующим парам точек  $A, B$  и  $A, B$  строфоид  $S$  и  $\Sigma$  построить основные окружности  $D_0, \Delta_0$  и  $H_0$  (фиг. 21).

Продолжим линии  $AB$  и  $AB$  до их взаимного пересечения в точке  $\gamma$  и построим два прямоугольника, для которых общей стороной служит  $O\gamma$ , а диагоналями — линии  $AB$  и  $AB$ . Три стороны этих прямоугольников, не проходящие через  $O$ , пересекутся с лучами  $OA$  и  $OB$  в точках  $a, b; a_1, b_1; a_2, b_2$ . Окружности  $Oab, Oa_1b_1, Oa_2b_2$  и будут основными окружностями  $D_0, H_0, \Delta_0$ .

§ 18. Из формул (1) и (5) предыдущего параграфа мы видим, что между диаметрами двух основных окружностей  $D_0$  и  $\Delta_0$ , касающихся оси  $x$ , и величиной  $W_0$  мы имеем соотношение

$$\frac{1}{W_0} = \frac{1}{D_0} - \frac{1}{\Delta_0}. \quad (1)$$

Кроме точек  $W_0, D_0, \Delta_0$ , находящихся на оси  $y$ , нам часто придется иметь дело еще с двумя точками оси  $y$ , которые мы обозначим через  $M_0$  и  $K_0$ , или  $2M_0$ , с ординатами  $M_0$  и  $K_0 = 2M_0$ , причем

$$M_0 = -\frac{3W_0^2}{4W_{1y} - 6W_0} = -\frac{c_1}{b_1}. \quad (2)$$

Легко видеть, что  $2M_0$ , связано с  $D_0$  и  $\Delta_0$  соотношением

$$\frac{1}{2M_0} = \frac{1}{D_0} + \frac{1}{\Delta_0}. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь некоторые геометрические фигуры, связанные с точками  $D_0, \Delta_0, W_0$  и  $M_0$ .

Соединим точки  $D_0$  и  $H_0$  прямой ( $\lambda$ )

$$\frac{x}{H_0} + \frac{y}{D_0} = 1$$

и точки  $\Delta_0$  и  $H_0$  прямой (1)

$$\frac{x}{H_0} + \frac{y}{\Delta_0} = 1.$$

Через начало проведем линии  $OE$  и  $OE$  им параллельные

$$\frac{x}{H_0} + \frac{y}{D_0} = 0, \quad \frac{x}{H_0} + \frac{y}{\Delta_0} = 0.$$

Мы будем иметь параллелограм  $OEH_0E$  и для точки  $E$  из написанных уравнений получаем

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{D_0} - \frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{W_0}; \quad y = W_0.$$

Так же для точки  $E$  имеем

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\Delta_0} - \frac{1}{D_0} = -\frac{1}{W_0}; \quad y = -W_0.$$

Таким образом проекции точек  $E$  и  $E$  на ось  $y$  соответственно будут точка  $W_0$  и точка симметричная с ней —  $W_0$ .

Докажем, что точке  $E$  прямой  $(\lambda)$  будет соответствовать в преобразовании § 8 на строфоиде  $S$  точка Ball'a,  $T_0$ . Действительно, чтобы построить точку  $T_0$ , соответствующую точке  $E$ , надо из  $E$  опустить перпендикуляры  $EP$  и  $EW_0$  на оси  $x$  и  $y$ , соединить подошвы их  $P$  и  $W_0$  прямой и построить проекцию  $T_0$  точки  $O$  на прямую  $PW_0$ . Из этого построения ясно, что точка  $T_0$  лежит на круге перегиба. Из формул § 8 мы находим  $y/x = \xi/\eta$ , если через  $\xi, \eta$  означим координаты точки  $E$ , а через  $x, y$  — координаты соответствующей ей точки  $T_0$ . Но прямая  $OE$  параллельна прямой  $\Delta_0 H_0$  и потому ее угловой коэффициент

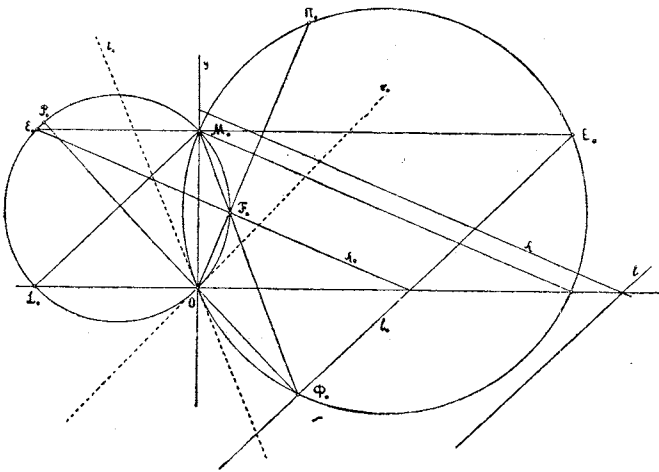
$$\frac{\eta}{\xi} = -\frac{\Delta_0}{H_0} = \frac{W_{1x}}{W_{1y}}$$

и следовательно  $y/x = W_{1y}/W_{1x}$ . Таким образом точка  $T_0$  лежит на прямой, соединяющей мгновенный центр с

точкой  $W_1$ . Так как кроме того она лежит и на круге перегиба, то она и есть точка Ball'a (теорема II § 16).

§ 19. Окружность, проходящую через двойную точку  $O$  и фокус  $F_0$  строфоиды  $S$  и касательную к прямой  $O\tau_0$ , параллельной асимптоте строфоиды  $\Sigma$ , мы будем называть окружностью  $C$ .

Окружность, проходящую через двойную точку  $O$  и фокус  $\Phi_0$  строфоиды  $\Sigma$  и касательную к прямой  $Ot_0$ , параллельной асимптоте строфоиды  $S$ , будем называть окружностью  $\Gamma$ .



Фиг. 22.

Из определения окружности  $C$  и теоремы II § 8 следует:

**Теорема 1.** Диаметр окружности  $C$ , заключенный между осями, касается параболы  $(\nu_0)$ .

Соединим центры основных окружностей  $D_0, H_0$  прямой  $(\lambda_0)$  (фиг. 22)

$$\frac{2x}{H_0} + \frac{2y}{D_0} = 1 \tag{1}$$

и центры основных окружностей  $\Delta_0, H_0$  прямой  $(l_0)$

$$\frac{2x}{H_0} + \frac{2y}{\Delta_0} = 1. \tag{2}$$

Опустив на них перпендикуляры из начала координат, построим фокусы  $F'_0$  и  $\Phi_0$  строфиод  $S$  и  $\Sigma$ . Направления ассимптот,  $t_0$  и  $\tau_0$ , будут симметричны с направлениями  $OF'_0$  и  $O\Phi_0$  по отношению к оси  $y$ .

Так как по определению окружность  $C$  касается прямой

$$y = \tau_0 x,$$

параллельной ассимптите строфиоды  $\Sigma$ , то уравнение ее диаметра проходящего через  $O$  будет

$$y = -\frac{1}{\tau_0} x. \quad (3)$$

Конец его,  $E_0$ , должен находится на линии  $(\lambda_0)$ , ибо окружность  $C$  проходит через точки  $O$ ,  $F'_0$  и по построению  $(\lambda_0)$  перпендикулярна к  $OF'_0$ . Решая поэтому совместно уравнения (1) и (3), мы находим ординату точки  $E_0$

$$y = \frac{2D_0\Delta_0}{D_0 + \Delta_0} = M_0.$$

Из симметрии этой формулы для  $y$  мы убеждаемся, что у окружности  $\Gamma$  ордината конца  $E_0$  диаметра, проходящего через начало, будет также равна  $M_0$ . Поэтому прямая  $E_0E_0$  будет перпендикулярна к оси  $y$ , пересечет ее в точке  $M_0$  и обе окружности  $C$  и  $\Gamma$  пройдут через эту точку.

Вследствие того, что направления  $OF'_0$  и  $O\Phi_0$  симметричны с направлениями  $Ot_0$  и  $O\tau_0$  относительно оси  $y$ ,  $\angle F'_0O\Phi_0 = \angle \tau_0Ot_0$ , и, принимая во внимание лемму I § 1, мы имеем такую теорему:

**Теорема II.** *Окружности  $C$  и  $\Gamma$  и линия, соединяющая фокусы строфиод  $S$  и  $\Sigma$ , проходят через точку  $M_0$ .*

Диаметры окружностей  $C$  и  $\Gamma$ , заключенные между осями, имеют угловые коэффициенты соответственно равные  $1/\tau_0$  и  $1/t_0$ . Нетрудно поэтому убедиться, что они соответственно параллельны линиям  $(t_0)$  и  $(\lambda_0)$  и что их уравнения и уравнения окружностей  $C$  и  $\Gamma$  имеют такой вид

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\tau_0} x + M_0, & y &= \frac{1}{t_0} x + M_0, \\ x^2 + y^2 - M_0(y - \tau_0 x) &= 0, & (x^2 + y^2) - M_0(y - t_0 x) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Исключая из уравнений окружности  $C$  и строфиоды  $S$  величину  $x^2 + y^2$ , мы получим

$$(y + t_0 x)(y + \tau_0 x) = 0, \quad (5)$$

уравнение двух радикальных осей основных окружностей  $D_0$  и  $H_0$  строфиоды  $S$  и основных окружностей  $\Delta_0$  и  $H_0$  строфиоды  $\Sigma$ . То же уравнение (5) мы получим, если  $x^2 + y^2$  мы исключим из уравнения строфиоды  $\Sigma$  и уравнения окружности  $\Gamma$ . Таким образом точки пересечения окружности  $C$  со строфиодой  $S$  и точки пересечения окружности  $\Gamma$  со строфиодой  $\Sigma$  лежат на радикальных осях строфиод. Первая ось  $y + t_0 x = 0$ , проходит через фокус  $F'_0$  строфиоды  $S$ , перпендикулярна к диаметру окружности  $\Gamma$ , заключенному между осями, и пересекает окружность  $\Gamma$  в точке  $\Pi_0$  строфиоды  $\Sigma$ . Вторая ось  $y + \tau_0 x = 0$  проходит через фокус  $\Phi_0$  стро-



фоиды  $\Sigma$ , перпендикулярна к диаметру окружности  $C$ , заключенному между осями, и пересекает окружность  $C$  в точке  $P_0$  строфоиды  $S$ . Мы имеем следовательно такую теорему:

**Теорема III.** *Окружности  $C$  и  $\Gamma$  пересекают соответствующие строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  (первая —  $S$ , вторая —  $\Sigma$ ) в фокусах  $F_0, \Phi_0$  и в точках  $P_0$  и  $\Pi_0$ , которые представляют собой отражения точки  $O$  в диаметрах окружностей, заключенных между осями. Эти четыре точки лежат попарно на радикальных осях основных окружностей.*

Так как точка  $P_0$  (фиг. 22) есть отражение точки  $O$  в диаметре окружности  $C$ , проходящем через точку  $M_0$ , то дуги  $OM_0$  и  $M_0P_0$  равны, и потому  $\angle OF_0M_0 = \angle M_0F_0P_0$  или  $\angle \Pi_0F_0M_0 = \angle M_0F_0P_0$ . Подобным же образом  $\angle \Pi_0\Phi_0F_0 = \angle F_0\Phi_0P_0$ ; следовательно, в треугольниках  $F_0\Phi_0P_0, F_0\Phi_0\Pi_0$  с общей стороной  $F_0\Phi_0$  два прилежащих к ней угла одного равны соответствующим двум углам другого.

**Теорема IV.** *Треугольники  $F_0\Phi_0P_0$  и  $F_0\Phi_0\Pi_0$  равны и симметрично расположены относительно прямой  $M_0F_0\Phi_0$ .*

**§ 20.** Для точек, находящихся в пересечении кривых (4'') и (5'') § 14, круги кривизны будут иметь касание 4-го порядка. Такого рода точки называются точками Бурместра. Число точек Бурместра сосчитать нетрудно. Кривая (5'') есть циркулярная кривая 3 порядка, которая проходит через двойную точку строфоиды  $S$  (уравнение 4'') и касается в этой точке одной из ее ветвей (оси  $x$ ). Поэтому из 9 точек пересечения кривой (5'') со строфоидой  $S$  две должны совпасть с циклическими точками в бесконечности, три совпадут с мгновенным центром и только остальные четыре будут точками Бурместра.

**Теорема I.** *Для каждого положения движущейся плоскости существует четыре точки Бурместра.*

Если мы из уравнений (4'') и (5'') § 14 исключим  $r^2$  и  $\varphi$ , то получим уравнение

$$a_0x(A_2x + B_2y) - (A_1x + B_1y)(a_1x + b_1y + c_1) = 0 \quad (C)$$

конического сечения, проходящего через четыре точки Бурместра. Его мы будем обозначать буквою  $C$ . Оно проходит через четыре точки пересечения прямых

$$x = 0, A_2x + B_2y = 0$$

с прямыми  $A_1x + B_1y = 0, a_1x + b_1y + c_1 = 0$ . Одна из этих точек есть начало координат, другая

$$x = 0, y = -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{3W_0^2}{4W_{1y} - 6W_0} = M_0$$

есть точка  $M_0$ .

В начале координат коника  $C$  касается прямой

$$A_1x + B_1y = 0$$

или

$$y = \tau_0x,$$

а в точке  $M_0$  — прямой

$$a_0B_2x - B_1(a_1x + b_1y + c_1) = 0.$$

Уравнение хорды ( $h$ ), заключенной между осями,

$$a_0A_2x - A_1(a_1x + b_1y + c_1) = 0. \quad (h)$$

**Теорема II.** Точки Бурместра определяются пересечением строфоиды  $S$  с коническим сечением  $C$ , которое проходит через мгновенный центр, точку  $M_0$ , и касается прямой  $O\tau_0$ , параллельной асимптоте строфоиды  $\Sigma$ .

Точкам, расположенным на кривой (5''), соответствуют центры кривизны, расположенные на кривой, уравнение которой —

$$\varrho^2(A_2a + B_2b + c_1) + W_0b(a_1a + b_1b + c_1) = 0$$

мы получим, преобразуя уравнение (5'') при помощи формул (1) § 15. Исключая из этого уравнения и уравнения строфоиды  $\Sigma$  величину  $\varrho^2$ , мы получим уравнение

$$a_0a(A_2a + B_2b + c_1) - (A_1a + B_1b)(a_1a + b_1b + c_1) = 0 \quad (\Gamma)$$

конического сечения  $\Gamma$ , проходящего через центры кривизны, соответствующие точкам Бурместра. Кривая  $\Gamma$  проходит через четыре точки, в которых прямые

$$x = 0, \quad A_2x + B_2y + c_1 = 0$$

пересекаются с прямыми

$$A_1x + B_1y = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Одна из этих точек есть начало координат, другая — точка  $M_0$ . Уравнение касательной в начале координат

$$(A_1 - a_0)x + B_1y = 0$$

или

$$y = t_0x.$$

**Теорема III.** Центры кривизны, соответствующие точкам Бурместра, находятся в пересечении строфоиды  $\Sigma$  и конического сечения  $\Gamma$ , которое проходит через мгновенный центр, через точку  $M_0$  и касается прямой  $O\tau_0$ , параллельной асимптоте строфоиды  $S$  1).

§ 21. Координаты точек Бурместра, вообще говоря, не будут удовлетворять уравнению (6'') § 14, которое не есть следствие уравнений (4'') и (5''). Точки Бурместра будут поэтому, вообще говоря, 4-го порядка. Но при некотором частном расположении точек  $W$  может случиться, что кривая (6'') пройдет через одну, несколько и даже через все точки Бурместра. В таком случае через те же точки пройдет и кривая второго порядка, уравнение которой

$$a_0x(A_3x + B_3y) - (A_1x + B_1y)(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad (1)$$

мы получаем как следствие уравнений (4'') и (6'') после исключения из них  $r^2$  и  $\varphi$ . Обратно, точки Бурместра, лежащие на кривой (1), будут лежать и на кривой (6'') и будут точками 5-го порядка. Таким образом те и только те точки Бурместра, которые лежат на кривой (1), будут точками 5-го порядка.

Рассматривая уравнение (C) § 20 и (1) мы видим, что конические сечения ими определяемые оба проходят через начало координат и оба касаются в начале прямой  $O\tau_0$ :  $A_1x + B_1y = 0$ . Если поэтому кривая (1) будет иметь с кривой  $C$  кроме начала еще три общих точки, то эти кривые совпадут и кривая (1) пройдет через все точки Бурместра.

1) Теоремы II и III принадлежат Р. Мюллеру. Z. f. M. u. Ph. V. 37, S. 147.

Пусть 3 точки Бурместра 5-го порядка. В таком случае они лежат не только на кривой  $C$ , но и на кривой (1). Кривые имеют три общих точки и следовательно тождественны. Четвертая точка Бурместра лежит поэтому тоже на кривой (1) и будет 5-го порядка.

**Теорема I.** *Если три точки Бурместра 5-го порядка, то и четвертая точка будет 5-го порядка.*

Если кривые  $C$  и (1) пересекают ось  $y$  в одной и той же точке, то ординаты этих точек должны быть равны

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}, \quad c_1 b_2 = b_1 c_2$$

или

$$3W_0W_{2x} + 6W_0W_{1x} - 8W_{1x}W_{1y} = 0 \quad (B)$$

или

$$a_0A_2 = A_1a_1 - B_1b_1.$$

В этом случае достаточно еще двух общих точек для кривых  $C$  и (1), чтобы они совпали и все точки Бурместра были 5-го порядка.

**Теорема II.** *Если при условии (B) две точки Бурместра будут 5-го порядка, то и две другие тоже будут 5-го порядка.*

Замечу, что эта теорема имеет важное значение в теории шарнирного четырехугольника. Центры подвижных шарниров описывают окружности, и для всякого положения подвижного звена будут точками Бурместра 5-го порядка. Поэтому две точки Бурместра, не совпадающие с шарнирами, будут одновременно или 5 или 4 порядка, смотря по тому, соблюдается ли условие (B) или нет.

Когда кривые  $C$  и (1), пересекаясь с осью  $y$  в одной и той же точке, имеют в этой точке общую касательную, то кроме соотношения (B) мы имеем еще одно:

$$\frac{c_1}{a_0B_2 - a_1B_1} = \frac{c_2}{a_0B_3 - a_2B_1}$$

или

$$a_0(B_2c_2 - B_3c_1) = B_1(a_1c_2 - a_2c_1) \quad (C)$$

или

$$3W_0^2(3W_0W_{3x} + 10W_0W_{1x} - 10W_{1x}W_{2y}) = B_1(a_1c_2 - a_2c_1),$$

выражающее равенство угловых коэффициентов касательных к кривым  $C$  и (1) в их точке пересечения на оси  $y$ . Если в этом случае кривые  $C$  и (1) имеют еще одну общую точку, на оси  $y$  не лежащую, то они будут тождественны.

**Теорема IV.** *Если при соблюдении условий (B) и (C) одна из точек Бурместра, не лежащая на оси  $y$ , будет 5-го порядка, то и все точки будут 5-го порядка.*

Когда кривые  $C$  и (1) пересекают не только ось  $y$ , но и ось  $x$  в одной и той же точке, так что кроме соотношения (B) мы имеем еще равенство:

$$\frac{c_1}{a_0A_2 - a_1A_1} = \frac{c_2}{a_0A_3 - A_1a_2}$$

или

$$a_0(A_2c_2 - A_3c_1) = A_1(a_1c_2 - a_2c_1) \quad (D)$$

или

$$-3W_0^2(3W_0W_{3y} + 10W_{1x}W_{2x}) = A_1(a_1c_2 - a_2c_1),$$

то кривые  $C$  и (1) совпадают, если кроме этих точек они имеют еще одну общую точку.

**Теорема V.** Если при соблюдении условий (B) и (D) одна из точек Бурместра, не лежащая ни на оси  $x$  ни на оси  $y$ , будет 5-го порядка, то и все точки будут 5-го порядка.

Наконец, если кривые  $C$  и (1) пересекаются на оси  $x$  и на оси  $y$ , и в точке пересечения, лежащей на оси  $y$ , имеют общую касательную, то мы имеем три равенства (B), (C), (D), и кривые совпадают.

**Теорема VI.** Если соблюдаются три условия (B), (C) и (D), то все точки Бурместра — 5-го порядка.

§ 22. Соберем в уравнениях конических сечений  $C$  и  $\Gamma$  члены с одинаковыми степенями  $x$  и  $y$  и напомним их таким образом:

$$(a_0 A_2 - a_1 A_1)x^2 + (a_0 B_2 - A_1 b_1 - B_1 a_1)xy - B_1 b_1 y^2 - c_1(A_1 x + B_1 y) = 0, \quad (1)$$

$$(a_0 A_2 - a_1 A_1)x^2 + (a_0 B_2 - A_1 b_1 - B_1 a_1)xy - B_1 b_1 y^2 - c_1[(A_1 - a_0)x + B_1 y] = 0. \quad (2)$$

Рассматривая эти уравнения и сопоставляя свойства кривых  $C$  и  $\Gamma$ , о которых говорится в теоремах II и III § 20, с определениями окружностей  $C$  и  $\Gamma$  § 19, мы видим, что конические сечения  $C$  и  $\Gamma$  обратятся в окружности  $C$  и  $\Gamma$ , если

$$a_0 A_2 = A_1 a_1 - B_1 b_1, \quad (3)$$

$$a_0 B_2 = A_1 b_1 + B_1 a_1$$

или

$$a_0 (A_2 + B_2 i) = (a_1 + b_1 i)(A_1 + B_1 i) \quad (4)$$

или

$$a_0 i(A_2 + B_2 i) = (a_1 + b_1 i)(W_{1x} + iW_{1y}). \quad (5)$$

В этом случае точки Бурместра определятся пересечением строфоиды  $S$  с окружностью  $C$ , а соответствующие им центры кривизны пересечением строфоиды  $\Sigma$  с окружностью  $\Gamma$ . Так как окружности  $C$  и  $\Gamma$  и строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  проходят через бесконечно удаленные циклические точки, то две точки Бурместра совпадут с этими последними, а две другие точки Бурместра и соответствующие им центры кривизны образуют фигуру рассмотренную в § 19. Одна из точек Бурместра на основании теоремы II § 19 совпадет с фокусом  $F_0$  строфоиды  $S$ , а другая,  $P_0$ , будет отражением начала координат  $O$  в диаметре окружности  $C$ , заключенном между осями. Эти точки  $P_0$  и  $F_0$  лежат на радикальных осях основных окружностей, и точки, в которых радикальные оси пересекают строфоиду  $\Sigma$ , будут соответствующими центрами кривизны. Эти последние будут вместе с тем и точками пересечения строфоиды  $\Sigma$  с окружностью  $\Gamma$ . Одна из них,  $\Phi_0$ , соответствующая точке  $P_0$ , будет фокусом строфоиды  $\Sigma$ , а другая,  $\Pi_0$ , соответствующая фокусу  $F_0$ , будет отражением точки  $O$  в диаметре окружности  $\Gamma$ , заключенном между осями.

Итак мы имеем теорему:

**Теорема I.** При соблюдении условия (5) точки Бурместра лежат на окружности  $C$ , а соответствующие центры кривизны — на окружности  $\Gamma$ .

Пользуясь тождеством первого равенства (3) с условием (B) § 21, этому последнему можем теперь дать другое геометрическое толкование, иное чем в § 21.

По данным  $a_1, b_1, A_1, B_1$  мы можем построить точку  $A_2 + iB_2$ , координаты которой  $A_2$  и  $B_2$  удовлетворяют условиям (3) или эквивалентному с ними условию (5), замечая, что на основании теории комплексных чисел треугольники с вершинами  $O, a_0i, W_1$  и  $O, a_1 + ib_1, A_2 + iB_2$  подобны. Если теперь мы будем точку  $W_2$  передвигать параллельно оси  $y$ , то первое из уравнений (3) останется в силе, второе же нарушится, ибо в первое входит только координата  $A_2$ , остающаяся при перемещении точки  $W_2$  постоянной, во второе же — переменная координата  $B_2$ . При этом коническое сечение  $C$  будет изменяться, хорда же ( $h$ ), отсекаемая в  $C$  осями координат, менять своего положения не будет, ибо в ее уравнение

$$a_0 A_2 x - A_1(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0 \quad (h)$$

переменная  $B_2$  не входит, а останется диаметром окружности  $C$ .

В справедливости этого мы легко также убеждаемся, замечая, что при условии (B) уравнение хорды ( $h$ ) обращается в уравнение

$$y = \frac{1}{\tau_0} x + M_0$$

диаметра окружности  $C$ .

**Теорема II.** При соблюдении условия (B) хорда конического сечения  $C$ , заключенная между осями координат, совпадает с диаметром окружности  $C$  и касается параболы ( $r_0$ ).

§ 23. Рассмотрим теперь другой весьма важный частный случай, когда коническое сечение  $C$ , на котором лежат точки Бурместра, распадается на две прямые линии. Условие распада:

$$\begin{vmatrix} 2(a_0 A_2 - a_1 A_1) & , & a_0 B_2 - A_1 b_1 - B_1 a_1 & , & -A_1 c_1 \\ a_0 B_2 - A_1 b_1 - B_1 a_1 & , & -2B_1 b_1 & , & -B_1 c_1 \\ -A_1 c_1 & , & -B_1 c_1 & , & 0 \end{vmatrix} = 0$$

после преобразований принимает вид:

$$a_0 c_1^2 B_1 (A_1 B_2 - A_2 B_1) = 0$$

или

$$9 W_0^3 W_{1x} (A_2 W_{1x} + B_2 W_{1y}) = 0$$

и приводит нас к теореме:

**Теорема I.** Коническое сечение  $C$ , на котором лежат точки Бурместра, распадается на две прямые линии в двух случаях:

- 1) когда  $A_2 W_{1x} + B_2 W_{1y} = 0$  (A)
- 2) когда  $W_{1x} = 0$ .

**Случай 1.** Когда  $A_2 W_{1x} + B_2 W_{1y} = W_{1x} W_{2x} + W_{1y} (W_{2y} - W_0) = 0$ , то прямая, соединяющая мгновенный центр с точкой  $W_1$ , перпендикулярна к прямой, соединяющей точки  $W_0$  и  $W_2$ . Точка их пересечения лежит на круге перегиба и совпадает, следовательно, на основании теоремы II § 16, с точкой Ball'a,  $T_0$ . В этом случае коническое сечение распадается на две прямые:

$$A_1 x + B_1 y = 0, \quad \text{или} \quad y = \tau_0 x$$

и

$$a_0 A_2 x - A_1(a_1 x + b_1 y + c_1) = 0. \quad (h)$$

Первая прямая  $O\tau_0$  соединяет точки  $O$  и  $W_1$  и параллельна асимптоте строфоиды  $\Sigma$ , вторая есть хорда ( $h$ ). Первая прямая встречается строфоиду  $S$  в точке  $Ball'a$ ,  $T_0$ : одна из точек Бурместра совпадает с точкой  $Ball'a$ . Три остальные точки Бурместра лежат на второй прямой  $h$ : они суть точки пересечения этой прямой со строфоидой  $S$ .

Рассмотрим теперь, не существует ли других случаев, когда одна из точек Бурместра совпадает с точкой  $Ball'a$ .

Точка  $Ball'a$  определяется пересечением линий:

$$\varphi = r^2 - W_0 y = 0 \quad \text{и} \quad A_1 x + B_1 y = 0.$$

Для того, чтобы она была точкой Бурместра, ее координаты должны удовлетворять еще и уравнению (5'') § 14.

Если  $W_{1x}$  не равно нулю, то, принимая во внимание предыдущие два уравнения, мы получаем из (5'') § 14 условие (A).

Если же  $W_{1x} = 0$ , то точка  $Ball'a$ , а вместе с ней и одна из точек Бурместра, совпадают с точкой  $W_0$ . Подставляя ее координаты  $(0, W_0)$  в уравнение (5''), находим  $B_2 = 0$  и следовательно  $A_2 W_{1x} + B_2 W_{1y} = 0$ .

Таким образом, совпадение одной из точек Бурместра с точкой  $Ball'a$  всегда влечет за собой равенство (A).

Точку Бурместра, совпадающую с точкой  $Ball'a$ , мы будем называть точкой Чебышева, а случай, когда происходит это совпадение, — случаем Чебышева. Когда точка  $Ball'a$  есть в то же время и точка Бурместра, круг кривизны ей соответствующий должен иметь с траекторией ее соприкосновение 4-го порядка и в то же время бесконечно большой радиус. Поэтому точке Чебышева соответствует касательная, проходящая через 5 бесконечно близких точек ее траектории, и точка Чебышева на значительном протяжении своего пути описывает кривую с большой степенью точности подходящую к прямой линии.

Сопоставляя все сказанное имеем теорему:

**Теорема II.** *В случае Чебышева одна из точек Бурместра совпадает с точкой  $Ball'a$  и превращается в точку Чебышева. Три другие точки Бурместра лежат на прямой ( $h$ ). Для того, чтобы имел место случай Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы соблюдалось условие (A).*

**Случай 2.** Если  $W_{1x} = 0$ , т. е. если точка  $W_1$  лежит на одной прямой с точкой  $W_0$  и мгновенным центром, то уравнения строфоид  $S$  и  $\Sigma$  обращаются в уравнения

$$x[(A_1 - a_0)r^2 + c_1 y] = 0 \quad \text{и} \quad x[A_1 r^2 + c_1 y] = 0$$

или

$$x(r^2 - D_0 y) = 0 \quad \text{и} \quad x(r^2 - \Delta_0 y) = 0. \quad (1)$$

Строфоида  $S$  распадается на ось  $y$  и на основную окружность  $D_0$ , строфоиды  $\Sigma$  — на ось  $y$  и основную окружность  $\Delta_0$ , а коническое сечение — на две прямые:

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ a_0(A_2 x + B_2 y) - A_1(b_1 y + c_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На каждой из этих прямых лежит по две точки Бурместра. Действительно, при  $W_{1x} = B_1 = a_1 = 0$  уравнение (5'') § 14 обращается в

$$r^2(A_2 x + B_2 y) - (r^2 - W_0 y)(b_1 y + c_1) = 0. \quad (3)$$

Решая его совместно с уравнением строфоиды  $S$ , мы должны в нем положить один раз  $x = 0$ , а в другой раз  $r^2 = D_0 y$ . При  $x = 0$  уравнение (3) принимает вид:

$$B_2 y^2 - (y - W_0)(b_1 y + c_1) = 0 \quad (4)$$

и определяет две точки Бурместра, лежащие на оси  $y$ . Заменяя же в уравнении (5'')  $r^2$  через  $D_0 y$ , мы получаем:

$$D_0(A_2 x + B_2 y) - (D_0 - W_0)(b_1 y + c_1) = 0$$

и, замечая, что

$$\frac{D_0 - W_0}{D_0} = \frac{W_{1y}}{3W_0} = \frac{A_1}{a_0},$$

$$a_0(A_2 x + B_2 y) - A_1(b_1 y + c_1) = 0 -$$

уравнение той прямой (2), которая вместе с осью  $y$  образует теперь коническое сечение  $C$ . Пересечением этой прямой с окружностью  $D_0$  и будут определяться две другие точки Бурместра.

**Теорема III.** Если  $W_{1x} = 0$  и точки  $O, W_0, W_1$  лежат на одной прямой, то обе строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  распадаются каждая на ось  $y$  и основную окружность  $D_0$  и  $\Delta_0$ . Две точки Бурместра лежат на оси  $y$ , их ординаты определяются уравнением

$$B_2 y^2 - (y - W_0)(b_1 y + c_1) = 0.$$

Две другие — на основной окружности  $D_0$  в точках пересечения с прямой

$$a_0(A_2 x + B_2 y) - A_1(b_1 y + c_1) = 0.$$

**§ 24.** Рассмотрим, какими свойствами обладают точки Бурместра, если соблюдаются одновременно условия (A) и (B).

При условии (A) три точки Бурместра лежат на прямой ( $h$ ) и четвертая есть точка Чебышева. При условии (B) все четыре точки будут 5-го порядка, если две из них 5-го порядка, и касательная, соответствующая точке Чебышева, будет проходить через 6 бесконечно близких точек ее траектории. Случай, когда соблюдаются одновременно условия (A) и (B), мы будем поэтому называть случаем Чебышева 5-го порядка.

Прямая  $y = \tau_0 x$ , на которой лежит точка Чебышева, всегда касается окружности  $C$ . Прямая же ( $h$ ), на которой лежат три точки Бурместра  $A, B, C$ , при условии (B) совпадает с диаметром этой окружности, заключенным между осями. Принимая во внимание теорему IIb § 9, мы имеем следующую теорему:

**Теорема.** В случае Чебышева 5-го порядка три точки Бурместра  $A, B, C$  лежат на диаметре в окружности  $C$ , заключенном между осями и касающемся параболы ( $\tau_0$ ); точка Чебышева,  $T_0$ , лежит на касательной к этой окружности, проведенной через начало. Между углами мы имеем соотношения:

$$2\sigma AO = OAT_0, \quad 2\sigma BO = OBT_0, \quad 2\sigma CO = OCT_0.$$

**§ 25.** Рассмотрим еще вопрос, может ли точка Бурместра лежать на оси  $x$ .

Если точка лежит на оси  $x$ , но не в начале координат, т. е.  $x \neq 0, y = 0$ , то из уравнений (2'), (3') § 14 мы получаем:

$$a = 0, \quad b = 0,$$

и уравнения (4'), (5'), (6') обращаются в

$$\begin{aligned} (A_1 - a_0)x &= 0, \\ A_2x - (a_1x + c_1) &= 0, \\ A_3x - (a_2x + c_2) &= 0; \end{aligned}$$

из них мы имеем:

$$A_1 = a_0, \quad x = \frac{c_1}{A_2 - a_1}, \quad x = \frac{c_2}{A_3 - a_2}.$$

При  $A_1 = a_0$ , или  $W_{1y} = 3W_0$  уравнение строфоиды  $S$  принимает вид:

$$\begin{aligned} r^2 B_1 y + c_1 xy &= 0, \\ y(r^2 - H_0 x) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

и строфоида распадается на ось  $x$  и окружность  $H_0$ .

**Теорема I.** Если  $W_{1y} = 3W_0$ , то строфоида  $S$  распадается на ось  $x$  и окружность  $H_0$ . Три точки Бурместра лежат на окружности  $H_0$ , четвертая на оси  $x$ , ее абсцисса:

$$x = \frac{c_1}{A_2 - a_1} = \frac{3W_0^2}{W_{2x} - 4W_{1x}}, \quad (2)$$

соответствующий ей центр кривизны находится в начале координат; она будет 5-го порядка, если

$$c_1(A_3 - a_2) = c_2(A_2 - a_1). \quad (D)$$

Заметим, что это последнее условие тождественно с условием (D) § 21 при  $A_1 = a_0$ .

Предположим затем, что точка  $x, y$  совпадает с началом координат, т. е.  $x = y = 0$ .

Если бы мы положили  $x = y = 0$ , то уравнение (2') § 14 обратилось бы в тождество, из (3') § 14 мы нашли бы  $b = 0$ , т. е. что соответствующий началу координат центр кривизны находится на оси  $x$ . Из уравнений (4'), (5'), (6') § 14, мы получаем:

$$A_1 = 0, \quad a = -\frac{c_1}{A_2}, \quad a = -\frac{c_2}{A_3}.$$

При  $A_1 = W_{1y} = 0$  ур. строфоиды  $\Sigma$  принимает вид (1), и мы имеем теорему:

**Теорема II.** Если  $W_{1y} = 0$ , то строфоида  $\Sigma$  распадается на ось  $x$  и окружность  $H_0$ . Одна из точек Бурместра совпадает с началом координат; центр ее кривизны лежит на оси  $x$  и имеет абсциссу

$$a = -\frac{c_1}{A_2} = -\frac{3W_0^2}{W_{2x}}; \quad (3)$$

она будет 5-го порядка, если

$$A_3 c_1 = A_2 c_2. \quad (D)$$

Заметим, что это последнее условие тождественно с условием (D) § 21 при  $A_1 = 0$ .

Надо впрочем обратить внимание на то, что последняя теорема не вполне точна и имеет только условное значение.



Действительно, пользуясь формулами § 14 для ускорений различных порядков точки  $(x, y)$  мы можем получить разложения координат точки совпадающей с началом  $(x=0, y=0)$  по степеням времени

$$\begin{aligned} x &= -W_{1y} \frac{t^3}{3!} - W_{2x} \frac{t^4}{4!} + W_{3y} \frac{t^5}{5!} + \dots, \\ y &= W_0 \frac{t^2}{2!} + W_{1x} \frac{t^3}{3!} - W_{2y} \frac{t^4}{4!} - W_{3x} \frac{t^5}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Разложения эти показывают нам, что точка, совпадающая с мгновенным центром, проходит через точку возврата первого рода, если  $W_{1y} \neq 0$ .

Когда же  $W_{1y} = A_1 = 0$ , то начало координат будет точкой возврата второго рода. Возвышая эти уравнения в квадрат и умножая первое на произвольный множитель  $2\rho$ , мы получаем:

$$x^2 + y^2 - 2\rho x = (3W_0^2 + \rho W_{2x}) \frac{t^4}{2! 3!} + (10W_0 W_{1x} - \rho W_{3y}) \frac{2t^5}{5!} + \dots$$

Примем  $y$  за главную бесконечно малую величину; тогда  $t$  будет величиной порядка  $1/2$  и при  $\rho$ , удовлетворяющем равенству:

$$3W_0^2 + \rho W_{2x} = 0,$$

величина  $x^2 + y^2 - 2\rho x$  — бесконечно малой порядка  $5/2$ . Поэтому порядок касания окружности радиуса  $\rho$  к траектории точки, проходящей через мгновенный центр, будет  $3/2$ , т. е. выше первого и мы можем считать  $\rho$  радиусом кривизны этой траектории.

Если величина  $\rho$ , определенная из предыдущего уравнения

$$\rho = -\frac{3W_0^2}{W_{2x}}$$

будет удовлетворять еще и уравнению

$$\rho W_{3y} - 10W_0 W_{1x} = 0,$$

что будет при соблюдении условия

$$3W_0 W_{3y} + 10W_{1x} W_{2y} = 0$$

или

$$A_3 c_1 = A_2 c_2,$$

то  $x^2 + y^2 - 2\rho x$  будет величиной третьего порядка, и касание окружности  $\rho$  к траектории точки будет второго порядка.

Таким образом мы видим, что при  $W_{1y} = 0$  начало координат, строго говоря, не будет точкой Бурместра. Тем не менее, чтобы не нарушать общности теоремы о существовании 4 точек Бурместра, а также и других теорем, мы будем считать, что при  $W_{1y} = 0$  одна из точек Бурместра совпадает с мгновенным центром, что соответствующий ей центр кривизны лежит на оси  $x$  и определяется абсциссой (3) и что при соблюдении условия (D) она является точкой 5-го порядка.

ГЛАВА IV.

§ 26. В дальнейшем нам часто придется пользоваться инволюцией лучей или точек, расположенных на окружности. Поэтому, прежде чем продолжать изучение свойств точек Бурместра, остановимся на некоторых геометрических построениях.

Возьмем окружность

$$x^2 + y^2 - Dx = 0$$

произвольного диаметра  $D$ , касающуюся оси  $x$  в начале координат. Конец диаметра, лежащего на оси  $y$ , мы будем также обозначать буквой  $D$ ; той же буквой будем обозначать и касательную к окружности в точке  $D$ . Условимся для краткости называть тангенс угла, образованного с осью  $x$  лучом, соединяющим начало с какой-нибудь точкой окружности, угловым коэффициентом этой точки и самую точку обозначать той же буквой, какой обозначен ее угловой коэффициент или той же буквой, которой обозначен ее полярный угол.

Возьмем на окружности две точки  $t_1$  и  $t_2$ . Их прямоугольные координаты будут

$$\begin{aligned} x_1 &= D \sin \varphi_1 \cos \varphi_1, & y_1 &= D \sin^2 \varphi_1, \\ x_2 &= D \sin \varphi_2 \cos \varphi_2, & y_2 &= D \sin^2 \varphi_2, \end{aligned}$$

если через  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  мы означим их полярные углы. Уравнение прямой, соединяющей эти точки, после преобразований можно привести к такому виду:

$$(t_1 + t_2)x + (t_1 t_2 - 1)y - Dt_1 t_2 = 0. \quad (1)$$

Полагая в этом уравнении сначала  $y = 0$ , потом  $x = 0$ , и наконец  $y = D$ , мы найдем отрезки, отсекаемые прямой на осях координат и на касательной  $D$ :

$$x = \frac{Dt_1 t_2}{t_1 + t_2}, \quad y = \frac{Dt_1 t_2}{t_1 t_2 - 1}, \quad x = \frac{D}{t_1 + t_2}. \quad (2)$$

Угловой коэффициент прямой

$$\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2} = \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (3)$$

То же уравнение (1), если в нем будем считать  $x$  и  $y$  постоянными ( $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ),

$$t_1 t_2 (D - y_0) - (t_1 + t_2)x_0 + y_0 = 0, \quad (4)$$

будет определять зависимость между угловыми коэффициентами двух точек, в которых прямые, проходящие через точку  $(x_0, y_0)$ , пересекаются с окружностью  $D$ . Так как это уравнение линейно и симметрично по отношению к  $t_1$  и  $t_2$ , то точки пересечения лучей пучка, имеющего центром  $(x_0, y_0)$ , с окружностью образуют инволюцию, центром которой служит точка  $(x_0, y_0)$ .

Таким образом, мы имеем теорему.

**Теорема I.** Если центром точечной инволюции, расположенной на окружности  $D$ , касающейся оси  $x$  в начале координат, служит точка  $(x_0, y_0)$ , то угловые коэффициенты  $t_1$  и  $t_2$  каждой пары точек связаны уравнением (4).

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из этой теоремы.

1. Предположим, что центр инволюции  $(x_0, y_0)$  удаляется в бесконечность по направлению, которое определяется угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \varphi_0 = y_0/x_0$ , и лучи пучка делаются параллельными. Тогда уравнение (4) обращается в следующее:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = y_0/x_0 = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2} = \operatorname{tg} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

или

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2.$$

В этом случае сумма полярных углов точек инволюции есть величина постоянная и равна углу, который образует ось  $x$  с лучами пучка.

Если  $\varphi_0 = 0$ , то  $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$  и  $t_1 = -t_2$ , т. е. угловые коэффициенты двух точек, лежащих на прямой параллельной оси  $x$  равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

Если  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ , то  $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  и  $t_1 t_2 = 1$ , т. е. произведение угловых коэффициентов двух точек окружности, лежащих на прямой параллельной оси  $y$ , равно единице.

2. Если центр инволюции совпадает с центром окружности  $D$ , то  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = \frac{D}{2}$  и  $t_1, t_2$  будут связаны уравнением  $t_1 t_2 = -1$ .

3. Если центр инволюции лежит на касательной  $D$ , то  $y_0 = D$ , и уравнение инволюции принимает вид:

$$(t_1 + t_2)x_0 = D \quad \text{или} \quad t_1 + t_2 = \frac{D}{x_0} = \operatorname{const.}$$

Обратно, центр инволюции  $t_1 + t_2 = \operatorname{const.}$  лежит на касательной  $D$ , и для его построения достаточно знать две соответствующие точки на окружности, соединить их прямой линией и продолжить ее до пересечения с касательной  $D$ . Точка пересечения и будет центром инволюции. Отсюда вытекает решение следующей задачи:

**Задача 1.** Построить на окружности  $D$  точку, угловой коэффициент которой  $\tau = t_1 + t_2 - t_3$ , где  $t_1, t_2$  и  $t_3$  — угловые коэффициенты трех данных на окружности точек.

Так как  $\tau + t_3 = t_1 + t_2$ , то мы можем рассматривать  $\tau, t_3$  как одну пару,  $t_1, t_2$  — как другую пару точек инволюции, центр  $C$  которой находится на касательной  $D$  и определяется как точка пересечения этой касательной с прямой  $t_1 t_2$ . Прямая  $Ct_3$  пересечется с окружностью  $D$  в искомой точке  $\tau$ .

Если надо построить  $\tau = t_1 + t_2$ , то стоит только положить  $t_3 = 0$ , т. е. совместить точку  $t_3$  с началом координат. Если требуется построить  $\tau = t_1 - t_3$ , то надо считать  $t_2 = 0$  и точку  $t_2$  совместить с началом.

Вообще указанным способом можно построить угол, тангенс которого равняется какой угодно алгебраической сумме тангенсов данных углов.

4. Если центр инволюции лежит на оси  $y$ , то  $x_0 = 0$ , и уравнение инволюции имеет вид

$$t_1 t_2 (D - y_0) + y_0 = 0 \quad \text{или} \quad t_1 t_2 = \frac{y_0}{y_0 - D} = \operatorname{const.}$$

Обратно для инволюции  $t_1 t_2 = \text{const.}$  центр лежит на оси  $y$  и легко может быть найден, если нам известны две соответствующие точки на окружности: стоит только соединить их прямой линией и найти точку пересечения ее с осью  $y$ . Эта точка и будет искомым центром. Отсюда вытекает решение следующей задачи:

**Задача 2.** Построить на окружности точку, угловой коэффициент которой  $\tau = \frac{t_1 t_2}{t_3}$ , где  $t_1, t_2, t_3$  — угловые коэффициенты трех данных на окружности точек.

Так как  $\tau t_3 = t_1 t_2$ , то мы можем рассматривать  $\tau, t_3$  и  $t_1, t_2$  как две пары соответствующих точек инволюции, центр которой  $C$  лежит на оси  $y$  в пересечении ее с прямой  $t_1 t_2$ . Прямая  $C t_3$  пересечет окружность в искомой точке  $\tau$ .

Если надо построить  $\tau = t_1 t_2$ , то полагаем  $t_3 = 1$ , т. е. принимаем за  $t_3$  точку, находящуюся в конце диаметра, параллельного оси  $x$ , над положительной частью оси  $x$ .

Если требуется найти  $\tau = t_1/t_3$ , то следует положить  $t_2 = 1$ .

Вообще, эта задача позволяет найти угол, тангенс которого равняется какому угодно дробному выражению, содержащему несколько тангенсов данных углов.

5. Если центр инволюции находится на оси  $x$ , то  $y_0 = 0$ , и уравнение инволюции имеет вид

$$\frac{D}{x_0} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \text{const.}$$

Пользуясь этой инволюцией, легко решить задачу: найти  $\tau$  так, чтобы

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_3} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_3}.$$

Следствия 3, 4, 5 мы можем формулировать следующей теоремой:

**Теорема II.** Пусть  $a, b, c, d$  — четыре точки окружности  $D$ . Прямая  $ab$  и  $cd$  пересекаются на касательной  $D$ , если  $a + b = c + d$ : на оси  $y$ , если  $ab = cd$ ; на оси  $x$ , если  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ .

6. **Задача 3.** Найти два угла так, чтобы тангенсы их  $t_1$  и  $t_2$  удовлетворяли бы двум уравнениям:

$$t_1 + t_2 = a_1 + a_2, \quad t_1 t_2 = b_1 b_2,$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — тангенсы углов, заданных точками  $a_1, a_2, b_1, b_2$  окружности  $D$ . Мы рассматриваем  $t_1$  и  $t_2$  как угловые коэффициенты двух точек, которые принадлежат одновременно двум инволюциям  $t_1 + t_2 = a_1 + a_2 = \text{const.}$ ,  $t_1 t_2 = b_1 b_2 = \text{const.}$  Центр первой инволюции есть точка  $C$  — пересечение прямой  $a_1 a_2$  с касательной  $D$ ; центр второй,  $C_1$ , определится пересечением прямой  $b_1 b_2$  с осью  $y$ . Луч  $CC_1$  будет принадлежать обоим инволюциям и пересечет окружность  $D$  в искомых точках  $t_1$  и  $t_2$ .

Очевидно, что эта задача равносильна задаче решения квадратного уравнения

$$t^2 - (a_1 + a_2)t + b_1 b_2 = 0.$$

Для изучения свойств инволюции мы можем вместо окружности  $D$  взять окружность  $H$ , касающуюся в начале координат оси  $y$ :

$$x^2 + y^2 - Hx = 0.$$

Уравнение прямой, соединяющей две точки этой окружности, можно привести к виду

$$(1 - t_1 t_2)x + (t_1 + t_2)y - H = 0, \quad (5)$$

где  $t_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ ,  $t_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$  имеют прежнее значение. Отрезки, отсекаемые этой прямой на осях, равны

$$x = \frac{H}{1 - t_1 t_2}, \quad y = \frac{H}{t_1 + t_2} \quad (6)$$

и угловой коэффициент прямой —

$$\frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 + t_2} = -\operatorname{ctg}(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (7)$$

Прямая перпендикулярна к прямой (1).

Уравнение

$$t_1 t_2 x_0 - (t_1 + t_2)y_0 + H - x_0 = 0 \quad (8)$$

определяет инволюцию на окружности  $H$ ; центром ее служит точка  $(x_0, y_0)$ . Из уравнения (8) можно вывести следствия, аналогичные тем, которые мы получили из уравнения (4).

§ 27. Возьмем на окружности  $D$  три произвольные точки  $a, b, c$ . Если уравнение прямой, соединяющей две точки  $a$  и  $b$  [§ 26 (1)]

$$(a + b)x + (ab - 1)y - Dab = 0$$

мы умножим на  $c$  и сложим с уравнением перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую  $ab$

$$(ab - 1)x - (a + b)y = 0,$$

то получим уравнение

$$(bc + ca + ab - 1)x + (abc - a - b - c)y - Dabc = 0 \quad (1)$$

или

$$(p_2 - 1)x + (p_1 - p_3)y + Dp_3 = 0 \quad (2)$$

прямой, проходящей через подошву перпендикуляра. В этом уравнении через  $p_1, p_2, p_3$  обозначены простые симметрические функции от  $a, b, c$

$$\begin{aligned} -p_1 &= a + b + c \\ p_2 &= bc + ca + ab \\ -p_3 &= abc. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как полученное уравнение симметрично относительно  $a, b, c$  и не изменяется от перестановки этих букв, то ясно, что прямая, им определяемая, проходит не только через подошву перпендикуляра опущенного из  $O$  на сторону  $ab$ , но также и через подошвы перпендикуляров, опущенных из начала и на две другие стороны  $bc$  и  $ca$  треугольника  $abc$ . Эта прямая представляет собой следовательно линию Симпсона для треугольника  $abc$ .

**Теорема I.** Если угловые коэффициенты трех точек окружности  $D$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  суть корни кубического уравнения

$$t^3 + p_1 t^2 + p_2 t + p_3 = 0,$$

то уравнение линии Симпсона треугольника  $abc$  —

$$(p_2 - 1)x + (p_1 - p_3)y + Dp_3 = 0.$$

Перепишав уравнение (1) линии Симпсона таким образом:

$$(cx - y)(a + b) + (ab - 1)(x + cy) - Dabc = 0,$$

мы видим, что она проходит через точку пересечения прямых

$$y = cx, \quad y = -\frac{1}{c}x + \frac{Dab}{ab - 1}.$$

Первая из них есть луч  $Oc$ , а вторая перпендикулярна к первой и проходит через точку, находящуюся на оси  $y$  и имеющую ординату  $Dab/(ab - 1)$ , т. е. через точку  $C_0$ , в которой сторона  $ab$  пересекает ось  $y$  [форм. (2) § 26]. Таким образом, точка  $C$  пересечения линии Симпсона с лучом  $Oc$  служит подошвой перпендикуляра, опущенного из  $C_0$  на луч  $Oc$ . Подобным же свойством обладают и точки  $A$  и  $B$ , в которых линия Симпсона пересекается с лучами  $Oa$  и  $Ob$ .

**Теорема II.** Обозначим через  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  точки пересечения оси  $y$  со сторонами треугольника  $abc$ . Подошвы перпендикуляров, опущенных из  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  на лучи  $Oa$ ,  $Ob$ ,  $Oc$ , лежат на линии Симпсона.

Эта теорема представляет частный случай теоремы IV § 3.

Определим координаты точки пересечения высот треугольника  $abc$ . Обозначив через  $x_1$ ,  $y_1$ ;  $x_2$ ,  $y_2$ ;  $x_3$ ,  $y_3$  координаты его вершин и полагая  $x_2 - x_3 = l_1$ ,  $y_2 - y_3 = m_1$ ,  $x_3 - x_1 = l_2$ ,  $y_3 - y_1 = m_2$ , напишем уравнения высот, проходящих через вершины  $a$  и  $b$ ,

$$(x - x_1)l_1 + (y - y_1)m_1 = 0, \quad (x - x_2)l_2 + (y - y_2)m_2 = 0,$$

и найдем координаты их точки пересечения

$$x = \frac{l_1 m_2 x_1 - l_2 m_1 x_2 + m_1 m_2 (y_1 - y_2)}{l_1 m_2 - l_2 m_1},$$

$$y = \frac{l_1 m_2 y_2 - l_2 m_1 y_1 + l_1 l_2 (x_2 - x_1)}{l_1 m_2 - l_2 m_1}.$$

Но точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  лежат на окружности  $D$ , и потому

$$x_1 = D \sin \varphi_1 \cos \varphi_1, \quad y_1 = D \sin^2 \varphi_1,$$

и подобные же формулы мы имеем и для  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$ . Подставляя эти зна-

чения координат в формулы для  $x$  и  $y$  и обозначая для удобства преобразований  $a = z_1$ ,  $b = z_2$ ,  $c = z_3$ , мы получаем:

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = \begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} = D^2 \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)(z_1 - z_2),$$

$$\begin{aligned} l_1 m_2 x_1 - l_2 m_1 x_2 - m_1 m_2 (y_1 - y_2) &= x_1 x_2 (y_2 - y_1) + x_2 x_3 (y_3 - y_2) + x_3 x_1 (y_1 - y_3) + \\ &+ (y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) = \\ &= D^3 \cos^4 \varphi_1 \cos^4 \varphi_2 \cos^4 \varphi_3 [z_1 z_2 (z_2^2 - z_1^2)(1 + z_3^2) + z_2 z_3 (z_3^2 - z_2^2)(1 + z_1^2) + \\ &+ z_3 z_1 (z_3^2 - z_1^2)(1 + z_2^2) + (z_2^2 - z_3^2)(z_3^2 - z_1^2)(z_1^2 - z_2^2)] = \\ &= D^3 \cos^4 \varphi_1 \cos^4 \varphi_2 \cos^4 \varphi_3 (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)(z_1 - z_2) [3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1], \\ l_1 m_2 y_2 - l_2 m_1 y_1 + l_1 l_2 (x_2 - x_1) &= y_2 y_3 (x_2 - x_3) + y_3 y_1 (x_3 - x_1) + y_1 y_2 (x_1 - x_2) - \\ &- (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) = \\ &= D^3 \cos^4 \varphi_1 \cos^4 \varphi_2 \cos^4 \varphi_3 [z_2^2 z_3^2 (z_2 - z_3)(1 - z_2 z_3)(1 + z_1^2) + \\ &+ z_3^2 z_1^2 (z_3 - z_1)(1 - z_3 z_1)(1 + z_2^2) + \\ &+ z_1^2 z_2^2 (z_1 - z_2)(1 - z_1 z_2)(1 + z_3^2) - (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)(z_1 - z_2)(1 - z_2 z_3)(1 - z_3 z_1)(1 - z_1 z_2)] = \\ &= D^3 \cos^4 \varphi_1 \cos^4 \varphi_2 \cos^4 \varphi_3 (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)(z_1 - z_2) [p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_3^2 - 1] \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$\begin{aligned} x &= D \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 [3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1], \\ y &= D \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 [p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_3^2 - 1], \end{aligned}$$

или, замечая, что

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 &= \frac{1}{(1 + z_1^2)(1 + z_2^2)(1 + z_3^2)} = \frac{1}{(p_2 - 1)^2 + (p_1 - p_3)^2}, \\ x &= \frac{3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1}{(p_2 - 1)^2 + (p_1 - p_3)^2}, \\ y &= \frac{p_2^2 - 2p_1 p_3 + 2p_3^2 - 1}{(p_2 - 1)^2 + (p_1 - p_3)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

В этих формулах  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  имеют прежние значения (3).

Если  $3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1 = 0$  и следовательно  $p_1 = \frac{3p_3 - p_2 p_3}{1 + p_2}$ ,

то  $x = 0$ ,

$$y = D \frac{p_2 + 1}{p_2 - 1}, \quad (6)$$

или, если вместо  $p_2$  подставим  $p_2 = \frac{3p_3 - p_1}{p_3 + p_1}$ :

$$y = D \frac{2p_3}{p_3 - p_1}. \quad (7)$$

Эта ордината вдвое больше начальной ординаты линии Симпсона (2) для треугольника  $abc$ .

Таким образом мы имеем следующую теорему:

**Теорема II.** Для того чтобы точка  $K$  пересечения высот треугольника  $abc$ , вписанного в окружность  $D$ , лежала бы на оси  $y$ , необходимо и достаточно, чтобы угловые коэффициенты вершин треугольника были корнями кубического уравнения

$$t^3 + p_1 t^2 + p_2 t + p_3 = 0,$$

коэффициенты которого связаны соотношением

$$3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1 = 0.$$

При соблюдении этого условия ордината точки  $K$  вдвое более начальной ординаты линии Симпсона для треугольника  $abc$ .

**§ 28.** В треугольнике, вписанном в окружность  $D$ , мы будем отличать одну сторону от других и будем называть ее основанием треугольника; говоря о вершине треугольника, будем подразумевать вершину противоположную основанию.

Возьмем совершенно произвольный треугольник  $abc$ , вписанный в окружность  $D$ . Приняв в нем сторону  $ab$  за основание и  $c$  — за вершину, отметим точку  $C_0$ , в которой основание пересекает ось  $y$ , и проведем через начало прямую  $O\gamma$ , параллельную основанию, до пересечения с окружностью  $D$  в точке  $\gamma$ . Такой же буквой мы обозначим и угловой коэффициент прямой  $ab$  по форм. (3) § 26

$$\gamma = \frac{a + b}{1 - ab}. \quad (1)$$

Обозначим числителя координаты  $x$  (форм. 5 § 27) точки пересечения высот треугольника  $abc$  одной буквой  $F$  и заменим в нем  $p_1, p_2, p_3$  их выражениями через  $a, b, c$  по формулам (3) § 27:

$$\begin{aligned} F &= 3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1 = \\ &= a + b + c + (bc + ca + ab)(a + b + c + abc) - 3abc. \end{aligned} \quad (2)$$

Во вторую часть введем угловой коэффициент  $\gamma$  линии  $ab$ ; подставив  $a + b = \gamma(1 - ab)$ , получим:

$$\frac{F}{1 - ab} = \gamma(1 + c^2)(1 + ab) + c(1 + \gamma^2)(1 - ab).$$

Если

$$F = 3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1 = 0,$$

то

$$\gamma(1 + c^2)(1 + ab) + c(1 + \gamma^2)(1 - ab) = 0 \quad (3)$$

или

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = \left(c + \frac{1}{c}\right) \frac{ab + 1}{ab - 1}. \quad (4)$$

Рассмотрим геометрическое значение этого равенства (фиг. 23).

Ордината точка  $C_0$ , в которой прямая  $ab$  пересекает ось  $y$  по формуле (2) § 26 равна

$$\frac{Dab}{ab - 1}.$$



Если же мы начало перенесем в центр  $O'$  окружности  $D$ , то ордината точки  $C_0$  будет

$$\delta = \frac{Dab}{ab-1} - \frac{D}{2} = \frac{D}{2} \cdot \frac{ab+1}{ab-1}.$$

Введя эту величину в уравнение (4), мы приведем его к виду

$$\gamma + \frac{1}{\gamma} = \left(c + \frac{1}{c}\right) \frac{2\delta}{D}. \quad (5)$$

Обозначим через  $n$  и  $r$  точки пересечения диаметра параллельного оси  $x$  с хордами  $(c, 1/c)$  и  $(\gamma, 1/\gamma)$ . Абсцисса точки  $r$  определится по формуле (2) § 26:

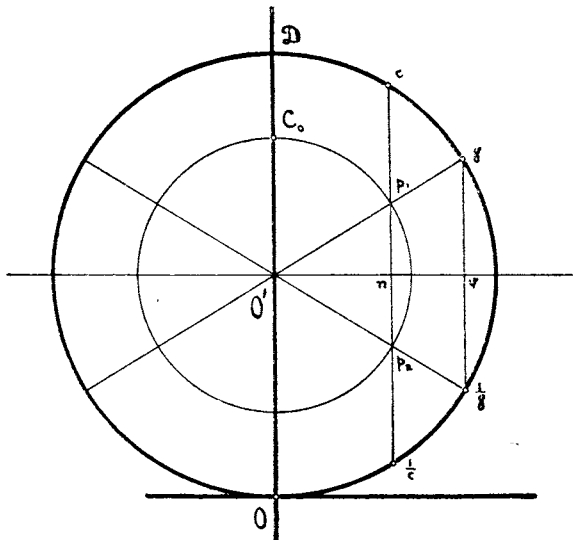
$$v = \frac{D}{\gamma + 1/\gamma} = \frac{D}{2} \cdot \frac{2}{\gamma + 1/\gamma}.$$

Так как  $r$  есть катет,  $\frac{D}{2}$  — гипотенуза треугольника  $O'\gamma r$ , то из этого равенства следует, что

$$\frac{2}{\gamma + 1/\gamma} = \cos \varphi,$$

т. е. косинусу угла  $\varphi$ , который диаметр, проходящий через точку  $\gamma$ , образует с осью  $x$ . По той же формуле (2) § 26 абсцисса точки  $n$

$$n = \frac{D}{c + 1/c},$$



Фиг. 23.

и равенство (5), будучи переписано таким образом:

$$n = \delta \cdot \cos \varphi,$$

показывает нам, что точка, радиус-вектор которой равен  $\delta$  и полярный угол  $\varphi$ , т. е. точка пересечения окружности, описанной из центра  $O'$  радиусом  $O'C_0 = \delta$ , с диаметром  $O'\gamma$  имеет абсциссу  $n$  и, следовательно, лежит на хорде  $(c, 1/c)$ .

**Теорема I.** Если точка пересечения высот треугольника  $abc$  лежит на оси  $y$ , то точки, в которых диаметры, проведенные через  $\gamma$  и  $1/\gamma$ , пересекаются с хордой  $(c, 1/c)$ , лежат с точкой  $C_0$  на одной и той же окружности, concentрической с окружностью  $D$ .

Вследствие параллельности хорды  $(c, 1/c)$  с осью  $y$  угол  $\angle p_1 O' C_0 = \angle O' p_1 n = \angle n p_2 O'$ . Поэтому, если мы повернем хорду  $(c, 1/c)$  вокруг центра  $O'$  на угол  $\angle p_1 O' C_0$ , так чтобы точка  $p_1$  хорды совпала с точкой  $C_0$ , то хорда сделается параллельной диаметру, проходящему через точку  $1/\gamma$ . Если же мы будем вращать хорду пока точка  $p_2$  не совпадет с  $C_0$ , то хорда сделается параллельной диаметру, проходящему через точку  $\gamma$ .

**Теорема II.** Если точка пересечения высот треугольника  $abc$  лежит на оси  $y$ , то хорды, проходящие через точку  $C_0$  и параллельные диаметрам, проведенным через точки  $\gamma$  и  $1/\gamma$ , равны хорде  $(c, 1/c)$ .

Из равенства (5) видно, что  $c$  и  $\gamma$  одного знака, когда  $\delta$  положительно и разных знаков, когда  $\delta$  отрицательно.

**Теорема III.** Если точка пересечения высот треугольника  $abc$  лежит на оси  $y$ , то точки  $c$  и  $\gamma$  находятся с одной и той же стороны оси  $y$ , когда точка  $C_0$  лежит выше центра окружности  $D$ , и с разных сторон оси  $y$ , когда точка  $C_0$  лежит ниже центра.

**§ 29. Задача 1.** Даны две точки окружности  $D$ ,  $a$  и  $b$ . Надо построить треугольник  $abc$  так, чтобы точка  $K$  пересечения его высот лежала на оси  $y$ .

На основании теоремы II § 27 и формулы (2) § 28 эта задача эквивалентна задаче: по данным  $a$  и  $b$  определить  $c$  так, чтобы

$$a + b + c + (bc + ca + ab)(a + b + c + abc) - 3abc = 0. \quad (1)$$

По отношению к  $c$  это уравнение квадратное. Определив в нем коэффициенты при  $c^2$  и свободный член, мы найдем, что они равны; следовательно, произведение корней уравнения  $c_1$  и  $c_2$  равно единице. Таким образом имеет место

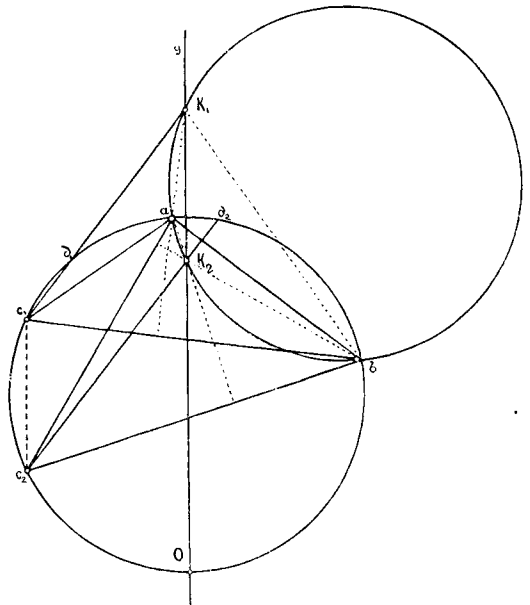
**Теорема I.** На данном основании  $ab$  можно построить два треугольника  $abc_1$  и  $abc_2$ , удовлетворяющих условию (1). Вершины их  $c_1, c_2$  лежат на прямой, параллельной оси  $y$ .

Решение задачи основано на теореме III § 1, по которой через точку  $K$  пересечения высот треугольника  $abc$ , вписанного в окружность  $D$ , проходят три окружности — отражения окружности  $D$  в сторонах треугольника  $abc$ .

Построим окружность —  $D$  (фиг. 24), симметричную с  $D$  относительно прямой  $ab$ . Эта окружность имеет такой же радиус как и окружность  $D$ , проходит через точки  $a$  и  $b$  и пересекает ось  $y$  в двух точках  $K_1$  и  $K_2$ .

Каждую из этих точек, на основании упомянутой теоремы, мы можем принять за точку пересечения высот искомого треугольника  $abc$ . Возьмем сначала точку  $K_1$ . Тогда линии  $K_1a$  и  $K_1b$  будут высотами треугольников  $abc$ , а линии, проведенные через  $a$  перпендикулярно к  $K_1b$  и через  $b$  перпендикулярно к  $K_1a$ , — его сторонами. Эти линии должны пересечься на окружности в точке  $c_1$ . Треугольник  $abc_1$  и будет искомым, и  $K_1$  будет точкой пересечения его высот. Если бы мы приняли точку  $K_2$  за точку пересечения высот искомого треугольника, то мы получили бы таким же образом другую вершину  $c_2$ .

Пользуясь теоремой I, можно, зная точки  $K_1$  и  $K_2$ , несколько иначе, чем было сказано, определить точки  $c_1$  и  $c_2$ . Так как  $K_1$  и  $K_2$  — точки пересечения высот треугольников  $abc_1$  и  $abc_2$ , то прямые, проведенные через  $K_1$  и  $K_2$  и перпендикулярные к стороне  $ab$ , должны пройти через вершины  $c_1$  и  $c_2$ . Но каждая из этих прямых пересекает окружность в двух точках: первая — в точках  $c_1$  и  $d_1$ , вторая — в точках  $c_2$  и  $d_2$ . Из четырех точек  $c_1, c_2, d_1$  и  $d_2$  только две служат вершинами искомых треугольников, две же другие являются чуждыми для задачи.



Фиг. 24.

Таким образом, если мы хотим определить вершины искомого треугольника, проводя через  $K_1$  и  $K_2$  прямые перпендикулярные к  $ab$ , то мы должны будем решить вопрос, какие из четырех полученных точек следует принять за искомые вершины. Вопрос решается последней теоремой: среди четырех точек надо взять ту пару, которая лежит на прямой, параллельной оси  $y$ . Нетрудно было бы показать, что среди полученных четырех точек такая пара всегда существует, и притом только одна.

Решение задачи будет действительно только в том случае, когда окружность  $D$  пересечется с осью  $y$  в действительных точках.

Задача может быть решена и на основании теорем I и II § 28.

Чтобы воспользоваться теоремой I, определим точку  $C_0$  пересечения прямой  $ab$  с осью  $y$ , опишем окружность, концентрическую с  $D$  и проходящую через  $C_0$ , и проведем через начало прямую, параллельную  $ab$ , до пересечения с окружностью  $D$  в точке  $\gamma$ . Диаметр, проведенный через  $\gamma$ , пересечется с построенной окружностью в точке  $p$ ; хорда  $(c, 1/c)$  пройдет через  $p$ , на концах ее будут находиться вершины  $c_1 = c$  и  $c_2 = 1/c$  двух искомого треугольников.

Теорема II приводит к такому построению. Определим, как сейчас сказано, точки  $C_0$  и  $\gamma$ , и, параллельно диаметру, проходящему через  $\gamma$ , проведем через  $C_0$  хорду. Хорда, равная этой последней и параллельная оси  $y$ , будет хордой  $(c, 1/c)$ .

В обоих решениях вопрос о том, с какой стороны оси  $y$  надо взять хорду  $(c, 1/c)$  решается теоремой III § 28.

**Задача 2.** Дана точка  $c$  на окружности  $D$  и точка  $C_0$  на оси  $y$ . Надо вписать в окружность треугольник  $abc$  так, чтобы основание его  $ab$  прошло через точку  $C_0$  и точка пересечения высот треугольника находилась на оси  $y$ .

Так как сторона  $ab$  должна пройти через данную точку  $C_0$ , то для решения задачи достаточно определить направление  $ab$ . Задача приводится к нахождению точки  $\gamma$ .

Для построения точки  $\gamma$  мы можем воспользоваться уравнением (5) § 28 и его геометрическим толкованием (теоремы I и II). Это уравнение по отношению  $\gamma$  второй степени и имеет два корня  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Из формы уравнения видно, что  $\gamma_2 = 1/\gamma_1$ ; следовательно, прямая, соединяющая  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  параллельна оси  $y$ , и направления  $O\gamma_1$  и  $O\gamma_2$  симметричны по отношению к биссектриссам угла  $xOy$  между осями координат. Основание  $ab$  искомого треугольника должно пройти через точку  $C_0$  и быть параллельно прямой  $O\gamma$ . Для точки  $\gamma$  мы имеем два положения:  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Поэтому и для стороны  $ab$  мы получаем также два положения, проведя через  $C_0$  две линии параллельные с  $O\gamma_1$  и  $O\gamma_2$ . Определив точки их пересечения с окружностью  $D$ , мы получим два треугольника  $a_1b_1c$  и  $a_2b_2c$ , у которых общая вершина находится в точке  $c$ , основания проходят через точку  $C_0$  и точка пересечения высот лежит на оси  $y$ .

Таким образом имеет место

**Теорема II.** По данной точке  $C_0$  и вершине  $c$  можно построить два треугольника  $a_1b_1c$  и  $a_2b_2c$ , удовлетворяющие условию (1). Направления их оснований  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$  симметричны по отношению к биссектриссам углов между координатными осями.

Точки  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  можно построить двумя способами.

1. Опишем из центра  $O'$  окружность радиусом равным  $\delta = O'C_0$ . Она пересечет хорду  $(c, 1/c)$  или ее продолжение в двух точках  $p_1$  и  $p_2$ . Диаметры, проведенные через  $p_1$  и  $p_2$ , встретят окружность  $D$  каждый в двух точках, первый — в точках  $\gamma_1$  и  $\gamma_3 = -1/\gamma_1$ , второй — в точках  $\gamma_2 = 1/\gamma_1$ ,  $\gamma_0 = -\gamma_1$ . Каждую из

точек  $p_1$  и  $p_2$  мы можем принять за точку пересечения хорды  $(c, 1/c)$  с диаметром, проходящим через искомую точку  $\gamma$ , и следовательно, каждая из четырех точек  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  будет удовлетворять условиям теоремы II § 28. Но наша задача имеет только два решения, и выбор из четырех точек двух, соответствующих задаче, может быть сделан на основании теоремы III § 28: если точка  $C_0$  лежит выше центра  $O'$ , то надо взять те из точек  $\gamma$ , которые лежат с той же стороны оси  $y$ , где находится и точка  $c$ , если же точка  $C_0$  лежит ниже центра  $O'$ , то надо взять две точки  $\gamma$ , лежащие с другой стороны оси  $y$ .

2. Проведем через  $C_0$  две хорды, равные хорде  $(c, 1/c)$ . Концы диаметров параллельных с ними будут точками  $\gamma$  и  $1/\gamma$ . Вопрос о том, которые концы соответствуют задаче, решается на основании теоремы III § 28.

Из первого построения точки  $\gamma$  мы видим, что точки  $p$ , а следовательно и точки  $\gamma$  будут действительны только в том случае, когда расстояние точки  $C_0$  от центра окружности  $D$  больше расстояния хорды  $(c, 1/c)$ : только в этом случае окружность, описанная из  $O'$  радиусом  $= O'C_0$  пересечется с хордой  $(c, 1/c)$  в действительных точках  $p_1$  и  $p_2$ . Но этого условия, как сейчас увидим, еще недостаточно для того, чтобы  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$  были действительны.

Предположим, что  $c$  и  $\gamma$  действительны. Угловые коэффициенты точек  $a$  и  $b$  мы можем рассматривать как корни квадратного уравнения

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

коэффициенты которого  $a + b$ ,  $ab$  мы можем выразить через  $c$  и  $\gamma$ . Обозначая через  $\delta$  ординату точки  $C_0$  по отношению к центру  $O'$ , мы имеем

$$\frac{2\delta}{D} = \frac{ab + 1}{ab - 1},$$

откуда

$$ab = \frac{2\delta + D}{2\delta - D}$$

и

$$1 - ab = -\frac{2D}{2\delta - D}.$$

Кроме того

$$a + b = \gamma(1 - ab) = -\frac{2D}{2\delta - D}\gamma$$

и следовательно, уравнение для определения  $a$  и  $b$  будет

$$(2\delta - D)x^2 + 2D\gamma x + (2\delta + D) = 0.$$

Корни его будут действительны, когда

$$D^2\gamma^2 - (2\delta - D)(2\delta + D) \geq 0$$

или

$$D^2(1 + \gamma^2) - 4\delta^2 \geq 0.$$

Но по уравнению (5) § 28

$$\frac{2\delta}{D} = \frac{\gamma + 1/\gamma}{c + 1/c};$$

следовательно

$$D^2(1 + \gamma^2) \left[ 1 - \frac{(1 + \gamma^2)c^2}{(1 + c^2)^2 \gamma^2} \right] \geq 0$$

или

$$\frac{1 + \gamma^2}{\gamma^2} \leq \left( \frac{1 + c^2}{c} \right)^2.$$

Обозначим через  $\theta$  полярный угол точки  $\gamma$ , т. е. положим  $\gamma = \operatorname{tg} \theta$ . Тогда, принимая во внимание, что абсцисса  $n$  хорды  $(c, 1/c)$  равна

$$n = \frac{Dc}{1 + c^2},$$

получим

$$n^2 \leq D^2 \sin^2 \theta$$

или

$$|n| \leq |D \sin \theta|.$$

Так как  $|D \sin \theta|$  равно расстоянию точки  $\gamma$  от начала координат, то это неравенство приводит нас к такому результату: для того чтобы при действительных  $c$  и  $\gamma$  вершины  $a$  и  $b$  треугольника  $abc$  были действительны, необходимо и достаточно, чтобы расстояние хорды  $(c, 1/c)$  от центра окружности  $D$  было меньше расстояния точки  $\gamma$  от начала координат.

Применим теперь эти результаты к решению вопроса о том, в каких случаях оба или одно из решений задачи 2 будут действительны.

1. Если точка  $C_0$  лежит ближе к центру окружности  $D$ , чем хорда  $(c, 1/c)$ , то точки  $\gamma$  будут мнимы; будут также мнимы и оба основания искомого треугольника.

2. Если точка  $C_0$  лежит дальше от центра чем хорда  $(c, 1/c)$ , то точки  $\gamma_1$  и  $\gamma_2 = 1/\gamma_1$  будут действительны. Так как эти точки лежат на прямой параллельной оси  $y$ , то одна из них  $\gamma_1$  лежит в верхней части окружности  $D$ , и расстояние ее от начала будет больше расстояния хорды  $(c, 1/c)$  от центра, и потому соответствующее точке  $\gamma_1$  основание  $a_1 b_1$  треугольника  $a_1 b_1 c$  будет действительно.

а. Если точка  $\gamma_2$ , находящаяся в нижней части окружности  $D$ , будет также дальше от начала, чем хорда  $(c, 1/c)$  от центра, то основание  $a_2 b_2$ , соответствующее точке  $\gamma_2$ , будет также действительно, и задача будет иметь два действительных решения.

б. Если же точка  $\gamma_2$  будет ближе к началу, чем хорда  $(c, 1/c)$  к центру, то основание  $a_2 b_2$ , соответствующее этой вершине, будет мнимым, и задача имеет одно действительное решение.

Итак, задача 2 может иметь два действительных решения, одно действительное и одно мнимое и, наконец, два мнимых.

**§ 30.** Построим, так же как и в предыдущих параграфах, окружность  $D$ , касающуюся оси  $x$  в начале координат, и будем точки строфоиды  $S$  проектировать из начала на эту окружность. Так как каждый луч, проведенный через начало, встречает и окружность и строфоиду в одной только точке, то установленное таким образом соответствие между точками строфоиды и их проекциями на окружность будет однозначным. Мы условимся обозначать соответствующие точки строфоиды и окружности одной и той же буквой: точку строфоиды — большой буквой и точку окружности — малой, и точки окружности  $D$  будем называть изображениями точек строфоиды  $S$ .

Этот способ изображения строфоиды  $S$  на окружности  $D$  будет тождественной с преобразованием, которым мы пользовались в § 7, если за окружность  $D$  мы примем основную окружность  $D_0$ .

Если же  $D \neq D_0$ , то соответствие, установленное между точками строфоиды и окружности, представляет собой квадратичное преобразование точки  $A(x, y)$  в точки  $a(\xi, \eta)$ .

$$x = \frac{D_0}{D} \frac{t_0 \xi}{t_0 \xi - \eta} \xi, \quad y = \frac{D_0}{D} \frac{t_0 \xi}{t_0 \xi - \eta} \eta, \quad (1)$$

или

$$\xi = \frac{D}{D_0} \frac{t_0 x - y}{t_0}, \quad \eta = \frac{D}{D_0} \frac{t_0 x - y}{t_0} \cdot \frac{y}{x}. \quad (2)$$

Действительно, при таком преобразовании строфоиды  $S$

$$(x^2 + y^2)(y - t_0 x) + D_0 t_0 x y = 0$$

переходит в окружность

$$\xi^2 + \eta^2 - D \eta = 0.$$

Можно было бы строфоиду  $S$ , проектируя из начала  $O$ , отобразить и на окружности  $H$ , касающейся оси  $y$  в точке  $O$ . Такое отображение соответствовало бы тоже квадратичному преобразованию

$$x = \frac{H}{H_0} \frac{\xi}{\eta - t_0 \xi} \xi, \quad y = \frac{H}{H_0} \frac{\xi}{\eta - t_0 \xi} \eta \quad (3)$$

или

$$\xi = \frac{H_0}{H} (y - t_0 x), \quad \eta = \frac{H_0}{H} (y - t_0 x) \frac{y}{x}.$$

Мы будем, однако, почти всегда пользоваться окружностью  $D$ .

Проведем через начало координат линию с угловым коэффициентом,

$$t_0 = \frac{W_{1y} - 3W_0}{W_{1x}},$$

параллельную асимптоте строфоиды  $S$ . Она пересечет окружность  $D$  в точке  $t_0$ , которая будет служить изображением бесконечно удаленной точки строфоиды. Точка  $t_0$  в дальнейшем будет играть важную роль.

Пусть прямая

$$\left. \begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \theta + M \\ \frac{x}{L} + \frac{y}{M} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$L = -M \operatorname{ctg} \theta,$$

пересекает строфоиду  $S$  в трех точках  $A, B, C$ , и пусть на окружности  $D$  им соответствуют точки  $a, b, c$ .

Если мы из уравнения прямой (4) и строфоиды  $S$ , написанных в полярных координатах:

$$\begin{aligned} r(\sin \varphi - \cos \varphi \operatorname{tg} \theta) &= M \\ r(\sin \varphi - t_0 \cos \varphi) &= H_0 \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned}$$

исключим радиус-вектор  $r$ , то для  $\operatorname{tg} \varphi = t$  мы получим кубическое уравнение

$$Mt^3 - (Mt_0 + H_0)t^2 + (M + H_0 \operatorname{tg} \Theta)t - Mt_0 = 0$$

или, короче,

$$t^3 + p_1 t^2 + p_2 t + p_3 = 0. \quad (5)$$

Корнями этого уравнения будут угловые коэффициенты точек  $a, b, c$ , и потому

$$-p_1 = a + b + c = t_0 + \frac{H_0}{M} = t_0 - \frac{D_0 t_0}{M}, \quad (6)$$

$$p_2 = bc + ca + ab = 1 + \frac{H_0}{M} \operatorname{tg} \Theta = 1 - \frac{D_0 t_0}{M} \operatorname{tg} \Theta = 1 - \frac{H_0}{L}, \quad (7)$$

$$-p_3 = abc = t_0. \quad (8)$$

Из этих формул мы выводим следующие теоремы:

**Теорема I.** Угловые коэффициенты изображений трех точек, в которых прямая (4) пересекает строфоиду (S), определяются кубическим уравнением (5).

Равенство (8) является необходимым условием для того, чтобы точки  $a, b, c$  служили изображением трех точек строфоиды, лежащих на одной прямой. Нетрудно видеть, что оно будет также и достаточным. Действительно, мы всегда можем подобрать  $\operatorname{tg} \Theta$  и  $M$  так, чтобы при существовании равенства (8) имели место и равенства (6) и (7), и тогда по теореме I  $a, b, c$  будут изображениями точек пересечения прямой (4) со строфоидой.

Переписав равенство (8) таким образом:

$$ab = t_0, \frac{1}{c},$$

мы видим, что прямые  $ab$  и  $\left(t_0, \frac{1}{c}\right)$  пересекаются в точке  $C_0$  оси  $y$  (теорема II, § 26). Так как  $c \cdot \frac{1}{c} = 1$ , то точки  $c$  и  $\frac{1}{c}$  лежат на одной прямой, параллельной оси  $y$  (см. § 26,1).

**Теорема II.** Для того чтобы  $a, b, c$  были изображениями трех точек строфоиды, лежащих на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы  $t_0 = abc$ , т. е. чтобы прямая  $ab$  пересекалась с прямой  $\left(t_0, \frac{1}{c}\right)$  на оси  $y$  (ср. теорему VII § 4).

**Следствие 1.** Пусть точка  $c$  совпадает с  $t_0$ . Тогда точка  $C$  удаляется в бесконечность, прямая  $ABC$  становится параллельной асимптоте строфоиды, и точки  $A$  и  $B$  получают название сопряженных точек строфоиды. При  $c = t_0$ ,  $ab = 1$ , и прямая  $ab$  становится параллельной оси  $y$ .

Таким образом, сопряженным точкам строфоиды соответствуют на окружности  $D$  точки, лежащие на прямой, параллельной оси  $y$ .

**Следствие 2.** Пусть точка  $C$  совпадает с фокусом строфоиды и, следовательно,  $c = -t_0$ ; тогда  $ab = -1$ , и точки  $a, b$  лежат на одном диаметре (см. § 21,2).

Итак, прямая, проходящая через фокус строфоиды, пересекает ее в двух точках, изображения которых находятся на концах одного и того же диаметра. Лучи, идущие к ним из начала координат, взаимно перпендикулярны.

Теорема II дает возможность легко решить следующие задачи.

1. Даны изображения  $a, b$  двух точек  $A$  и  $B$  строфоиды и  $t_0$ , найти изображение с точки  $c$ , в которой прямая  $AB$  пересекает строфоиду.

2. Даны изображения  $a, b, c$  трех точек строфоиды, лежащих на одной прямой; найти точку  $t_0$ .

На основании теоремы I § 27 и формул (5), (6), (7) и (8) мы получаем для линии Симпсона треугольника  $abc$  уравнение:

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{D}{D_0} M. \quad (9)$$

Сравнивая его с уравнением секущей прямой (4), имеем такую теорему:

**Теорема III.** Пусть  $a, b, c$  суть изображения трех точек  $A, B, C$ , в которых прямая (4) пересекает строфоиду; линия Симпсона для треугольника  $abc$  (9) параллельна секущей прямой и совпадает с ней, когда  $D = D_0$ .

**Следствия.** Эта теорема, представляющая обобщение теоремы VI § 4 (в том смысле, что теперь  $D \neq D_0$ ), дает нам возможность воспользоваться доказанными в I главе свойствами линии Симпсона. Сопоставим теперь некоторые из этих свойств.

1. По формуле (3) § 26 угловой коэффициент прямой  $ab$  равен

$$\gamma = \frac{a + b}{1 - ab}$$

и угол, образованный прямой  $ab$  с осью  $x$ , равен  $\varphi_1 + \varphi_2$  (фиг. 25).

2. Ось  $O\gamma'$  лучей  $Oa$  и  $Ob$  по отношению к оси  $y$  определяется условием  $\angle yOa = \angle bO\gamma'$  (теорема II, 3 § 2 и теорема III, 2 § 2); на ней лежит точка пересечения прямой  $ab$  и линии Симпсона треугольника  $abc$ . Нетрудно видеть, что  $O\gamma'$  будет перпендикулярна к прямой  $ab$  (теорема III, 1 § 2,  $\theta = 90^\circ$ ). Если, поэтому, мы обозначим точку пересечения  $O\gamma'$  с окружностью  $D$  через  $c'$ , то  $Dc'$  будет параллельна линии  $ab$  (теорема III, 1 § 2), и

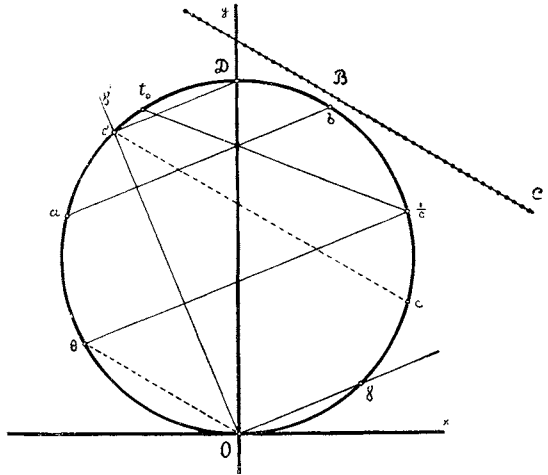
$$c' = \frac{ab - 1}{a + b}.$$

3. Ось  $O\gamma$  лучей  $Oa$  и  $Ob$  по отношению к оси  $x$  определяется условием  $\angle xOa = \angle bO\gamma$ . Поэтому  $O\gamma$  образует с осью  $x$  угол  $\varphi_1 + \varphi_2$ , параллельна прямой  $ab$  и перпендикулярна к прямой  $O\gamma'$ .

4. Если мы проведем прямую  $Dc'$ , параллельную  $ab$ , то  $cc'$  будет параллельна линии Симпсона треугольника  $abc$  (теорема III, 6 § 2) и следовательно, на основании теоремы III, и секущей прямой  $ABC$  (1). В этом можно убедиться, вычисляя угловой коэффициент прямой  $cc'$  [формула (3) § 26]:

$$\frac{c + c'}{1 - cc'} = \frac{bc + ca + ab - 1}{a + b + c - abc} = \frac{p_2 - 1}{p_3 - p_1}$$

и сравнивая его с угловым коэффициентом линии Симпсона (теорема I § 27).



Фиг. 25.



5. Так как  $O\gamma'$  и  $O\gamma$  взаимно перпендикулярны (3), то точки  $c'$  и  $\gamma$  находятся на противоположных концах одного и того же диаметра, и прямые  $c'e$  и  $\gamma c$  также взаимно перпендикулярны. Прямая  $ABC$ , будучи параллельна с  $c'e$ , перпендикулярна к  $c\gamma$ . В этом можно убедиться, вычисляя угловой коэффициент прямой  $c\gamma$

$$\frac{c + \gamma}{1 - c\gamma} = \frac{a + b + c - abc}{1 - bc - ca - ab} = \frac{p_3 - p_1}{1 - p_2}$$

и сравнивая его с угловым коэффициентом линии Симпсона (теорема I § 27).

6. Если мы проведем через точку  $c$  линию, параллельную оси  $y$ , то (теорема I, 1 § 26) угловой коэффициент точки пересечения ее с окружностью  $D$  будет  $1/c$ . Пусть прямая, проведенная через  $\frac{1}{c}$  параллельно прямой  $ab$ , пересекает окружность в точке  $\theta$ . По теореме I § 3 линия  $O\theta$  будет параллельна линии Симпсона треугольника  $abc$ , а следовательно и секущей прямой  $ABC$  (4). Отсюда следует, что угол, на который надо повернуть прямую  $ABC$ , чтобы сделать ее параллельной  $ab$ , будет равен углу  $\angle\left(O\theta, \frac{1}{c}\right)$  и будет измеряться половиной дуги  $\left(O, \frac{1}{c}\right)$  и

$$\frac{1}{c} = \text{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 - \theta).$$

7. Так как  $cc'$  параллельна прямой  $ABC$ , то угол  $\angle OCA = \angle Occ'$ . Но  $Dc'$  параллельна  $ab$  и мы имеем такие равенства между дугами

$$Oc' = Oa + ac' = \left(\frac{1}{a}, D\right) + (D, b) = \left(\frac{1}{a}, b\right) = \left(\frac{1}{b}, a\right).$$

Таким образом, угол  $\angle OCA$  измеряется половиной дуги

$$Oc' = \left(\frac{1}{a}, b\right) = \left(\frac{1}{b}, a\right).$$

Резюмируя все сказанное, мы видим, что прямые  $Dc'$ ,  $ab$ ,  $O\gamma$ ,  $\left(\frac{1}{c}, \theta\right)$  параллельны между собой и перпендикулярны к оси  $Oc'\gamma'$ , прямые  $c'e$  и  $O\theta$  параллельны прямой  $ABC$  и перпендикулярны к  $c\gamma$ .

Для уравнения (4), по формулам (6), (7), (8)

$$3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1 = \frac{H_0^2}{LM} \left( \frac{2L}{H_0} + \frac{2M}{D_0} - 1 \right).$$

Поэтому, на основании теоремы II § 22 точка  $K$  пересечения высот треугольника  $abc$  будет лежать на оси  $y$ , если

$$\frac{2L}{H_0} + \frac{2M}{D_0} = 1,$$

т. е. если секущая прямая (1)

$$\frac{x}{L} + \frac{y}{M} = 1$$

будет касаться параболы  $(v_0)$  (теорема I § 8). Ордината точки  $K$  в этом случае определится по формуле (6) § 27 и будет равна

$$2 \frac{D}{D_0} M,$$

т. е. будет вдвое больше начальной ординаты линии Симпсона.

**Теорема IV.** Для того чтобы точка  $K$  пересечения высот треугольника  $abc$ , вершины которого служат изображениями точек пересечения прямой со строфоидой, была на оси  $y$ , необходимо и достаточно, чтобы секущая касалась параболы  $(v_0)$ . При соблюдении этого условия ордината точки  $K$  будет вдвое больше начальной ординаты линии Симпсона треугольника  $abc$ .

Эта теорема представляет собой обобщение теоремы III § 7 (теперь  $D \neq D_0$ ).

Если мы будем вращать секущую прямую  $ABC$  вокруг точки  $C$ , то точки  $A$  и  $B$  будут перемещаться по строфоиде  $S$ . Точка же  $C$ , ее изображение  $c$ , прямая  $\left(t_0, \frac{1}{c}\right)$  и точка  $C_0$ , в которой прямая  $\left(t_0, \frac{1}{c}\right)$  пересекается с осью  $y$ , будут оставаться неподвижными, и прямая  $ab$ , соединяющая изображения  $a$  и  $b$  точек  $A$  и  $B$ , будет вращаться вокруг точки  $C_0$  (теорема II). Точка  $c'$ , которая определяется условием, что  $Dc'$  параллельна  $ab$ , будет двигаться по окружности  $D$ , а прямые  $Dc'$  и  $c'e$ , соединяющие точку  $c'$  с неподвижными точками  $D$  и  $c$ , по свойству круга будут поворачиваться в одну и ту же сторону на равные углы. Но  $ABC$  параллельна  $c'e$ , и  $ab$  параллельна  $Dc'$ ; мы имеем, следовательно, такую теорему:

**Теорема V<sub>a</sub>.** Если секущую прямую мы будем поворачивать вокруг точки  $C$ , то прямая  $ab$ , соединяющая изображение точек  $A$  и  $B$  на окружности  $D$ , будет поворачиваться в ту же сторону вокруг неподвижной точки  $C_0$  оси  $y$ , причем углы поворота секущей  $ABC$  и прямой  $abC_0$  будут равны (ср. теоремы III и IV § 3).

Эту теорему можно формулировать еще иначе:

**Теорема V<sub>b</sub>.** Если через точку  $C$  строфоиды мы проведем две секущие прямые  $CA_1B_1$  и  $CA_1B_1$ , то прямые  $ab$  и  $a_1b_1$ , соединяющие изображения точек  $A, B, A_1, B_1$ , пересекутся в точке  $C_0$  оси  $y$ , и угол между секущими будет равен углу между  $ab$  и  $a_1b_1$ :

$$\angle ACA_1 = \angle aC_0a_1.$$

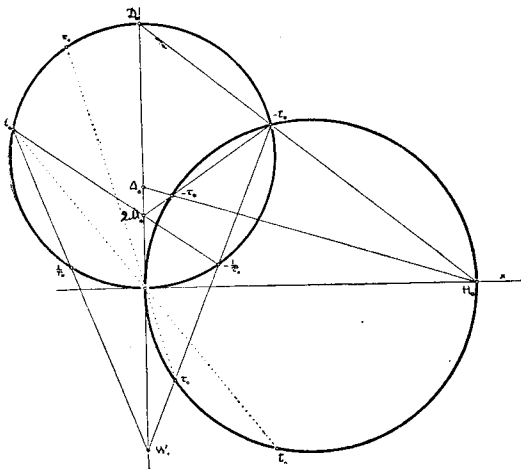
**§ 31.** Совершенно так же, как строфоиду  $S$ , мы можем на той же окружности  $D$  отобразить и строфоиду  $\Sigma$ , проектируя ее точки на окружность из начала  $O$ . Проведя через начало прямую с угловым коэффициентом

$$\tau_0 = \frac{W_{1y}}{W_{1x}},$$

параллельную ассимптоте строфоиды  $\Sigma$ , мы получим на окружности точку  $\tau_0$ , изображающую бесконечно удаленную точку строфоиды  $\Sigma$ . Все что было сказано относительно свойств изображений точек строфоиды  $S$  на окружности  $D$ , будет применимо и к изображению точек строфоиды  $\Sigma$ , только ту роль, которую для строфоиды  $S$  играли величины  $D_0$  и  $t_0$ , для строфоиды  $\Sigma$  играют величины  $\Delta_0$  и  $\tau_0$ . Точки строфоиды  $\Sigma$  и соответствующие им точки окружности  $D$  мы будем

обозначать одинаковыми буквами: точки  $\Sigma$  — большими буквами греческого алфавита и точки  $D$  — малыми буквами латинского.

Можно было бы проектируя из  $O$  отобразить обе строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  на окружности  $H$ , касающейся оси  $y$  в начале координат, и такой способ представлял бы некоторые преимущества перед предыдущими, ибо обе строфоиды имеют общую основную окружность  $H_0$ ; однако мы будем почти всегда пользоваться окружностью  $D$ .



Фиг. 26.

Таким образом каждая точка окружности  $D$  будет служить изображением двух точек плоскости, из которых одна лежит на строфоиде  $S$ , а другая — на строфоиде  $\Sigma$  и представляет собой центр кривизны, соответствующий первой точке.

Так, точка  $\tau_0$  представляет собой изображение бесконечно удаленной точки строфоиды  $\Sigma$  и точки  $Ball'a$ ,  $T_0$ , находящейся на строфоиде  $S$ , точка  $t_0$

служит изображением бесконечно удаленной точки строфоиды  $S$  и точки  $T_0$ , лежащей на строфоиде  $\Sigma$ .

Предположим на время, что окружность  $D$ , которую обыкновенно мы берем совершенно произвольно, есть основная окружность  $D_0$  строфоиды  $S$ . Выразим  $W_0$ ,  $2M_0$ ,  $\Delta_0$  через  $t_0$  и  $\tau_0$  и покажем, каким образом при помощи точек  $t_0$  и  $\tau_0$  можно построить точки  $W_0$ ,  $2M_0$  и  $\Delta_0$ , лежащие на оси  $y$ .

Из формул

$$D_0 = -\frac{3W_0^2}{W_{1y} - 3W_0}, \quad \Delta_0 = -\frac{3W_0^2}{W_{1y}}, \quad H_0 = \frac{3W_0^2}{W_{1x}},$$

мы выводим соотношения

$$H = -D_0 t_0 = -\Delta_0 \tau_0. \tag{1}$$

Исключая при их помощи из равенств

$$\frac{1}{2M_0} = \frac{1}{D_0} + \frac{1}{\Delta_0}, \quad \frac{1}{W_0} = \frac{1}{D_0} - \frac{1}{\Delta_0}$$

величину  $\Delta_0$ , мы находим

$$2M_0 = -\frac{H_0}{t_0 + \tau_0} = \frac{D_0 t_0}{t_0 + \tau_0}, \tag{2}$$

$$W_0 = -\frac{H_0}{t_0 - \tau_0} = \frac{D_0 t_0}{t_0 - \tau_0}. \tag{3}$$

Соединив точку  $\tau_0$  (фиг. 26) с центром окружности и проведя через  $\tau_0$  прямую, параллельную оси  $y$ , мы построим на окружности две точки  $-\frac{1}{\tau_0}$  и  $\frac{1}{\tau_0}$ . Соединим их прямыми с точкой  $t_0$  и определим по формулам (2) § 26 ординаты точек, в которых эти прямые пересекут ось  $y$ :

$$\frac{Dt_0/\tau_0}{t_0/\tau_0 - 1} = \frac{D_0 t_0}{t_0 - \tau_0} \quad \text{и} \quad \frac{-Dt_0/\tau_0}{t_0/\tau_0 - 1} = \frac{D_0 t_0}{t_0 - \tau_0}.$$



прямые  $t_0 C_0$  и  $\tau_0 C_0$  и определим их точки пересечения  $\frac{1}{c}$  и  $z$  с окружностью  $D$ .

Через  $\frac{1}{c}$  и  $z$  проведем прямые, параллельные  $ab$ . Они пересекут окружность  $D$  в точках  $\theta$  и  $\varphi$  и, на основании теоремы III, 6 предыдущего параграфа прямые  $O\theta$  и  $O\varphi$  будут соответственно параллельны прямым  $AB$  и  $\bar{A}\bar{B}$ .

Направление линий  $AB$  и  $\bar{A}\bar{B}$  можно определить еще иначе. Проведем через  $D$  прямую, параллельную  $ab$ , до пересечения с окружностью  $D$  в точке  $c'$  и через точки  $c$  и  $1/z$  — прямые параллельные оси  $y$  до пересечения с окружностью  $D$  в точках  $1/c$ ,  $z$ . По теореме III, 4 предыдущего параграфа прямые  $(c'c)$  и  $(c', 1/z)$  будут параллельны прямым  $AB$  и  $\bar{A}\bar{B}$ .

Закончить задачу можно различным образом.

1. Проведем  $O\gamma$  параллельно прямой  $ab$  и возьмем на ней произвольную точку  $\gamma$ . Через  $\gamma$  проведем прямые, параллельные  $O\theta \parallel c'c$  и  $O\varphi \parallel (c', 1/z)$ . Первая пересечет лучи  $Oa$  и  $Ob$  в точках  $A$  и  $B$ , вторая — в точках  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

2. Мы можем произвольно взять точку  $A$  на луче  $Oa$ , через нее проведем прямую  $AB\gamma$  параллельную  $O\theta \parallel c'c$ , найдем точку  $\gamma$  пересечения ее с осью  $O\gamma$ . Через точку  $\gamma$  проведем  $\bar{A}\bar{B}\gamma$  параллельную  $O\varphi \parallel (c', 1/z)$ .

**Задача 2.** По данному четырехугольнику  $ABAB$  построить окружность  $D$  и на ней точки  $t_0$  и  $\tau_0$ .

Диагональ  $O\gamma$  четырехугольника служит осью лучей  $OA$  и  $OB$  и определяет направление осей  $Ox$  и  $Oy$  и положение окружности  $D$ . Диаметр этой последней можно взять произвольно. На ней находим точки  $\theta$  и  $\varphi$ , проведя через  $O$  линии, параллельные  $\gamma AB$  и  $\gamma \bar{A}\bar{B}$ , затем точки  $a$ ,  $b$ ,  $1/c$ ,  $z$  и, наконец,  $t_0$  и  $\tau_0$ .

Можно воспользоваться также и точкой  $c'$ , которую получим, проведя через  $D$  линию  $De'$  параллельную  $ab$ . Прямые, проходящие через  $c'$  и параллельные с  $AB$  и  $\bar{A}\bar{B}$  определяют точки  $c$ ,  $1/z$ . По ним найдем точки  $1/c$ ,  $z$  и затем  $t_0$  и  $\tau_0$ .

**§ 33.** Вернемся теперь снова к рассмотрению свойств точек Бурместра и соответствующих им точек окружности  $D$ .

Напишем уравнения строфоиды  $S$  и конического сечения  $C$  в полярных координатах

$$r[(A_1 - a_0) \cos \varphi + B_1 \sin \varphi] + a_0 W_0 \sin \varphi \cos \varphi = 0, \quad (S)$$

$$\begin{aligned} &ra_0 \cos \varphi (A_2 \cos \varphi + B_2 \sin \varphi) - \\ &-(A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi) (a_1 r \cos \varphi + b_1 r \sin \varphi + c_1) = 0 \quad (C) \end{aligned}$$

и исключим из них  $r$ . Для определения угловых коэффициентов изображений точек Бурместра на окружности  $D$  мы получим уравнение 4 степени

$$\left. \begin{aligned} &B_1^2 c_1 t^4 + (2c_1 A_1 B_1 - W_0 a_0 b_1 B_1 - a_0 c_1 B_1) t^3 + \\ &+ [W_0 a_0^2 B_2 - W_0 a_0 a_1 B_1 + c_1 B_1^2 - W_0 a_0 b_1 A_1 + A_1 c_1 (A_1 - a_0)] t^2 + \\ &+ (W_0 a_0^2 A_2 - W_0 a_0 a_1 A_1 + 2c_1 A_1 B_1 - a_0 c_1 B_1) t + c_1 A_1 (A_1 - a_0) = 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

или, после преобразований,

$$\left. \begin{aligned} &t^4 + (t_0 + \tau_0) t^3 + \left( \frac{a_0 B_2}{B_1} + 5 - 2\tau_0^2 - t_0 \tau_0 \right) t^2 + \\ &+ \left( \frac{a_0 A_2}{B_1} - 5\tau_0 - t_0 \right) t + t_0 \tau_0 = 0, \end{aligned} \right\} (2)$$

где  $t = \operatorname{tg} \varphi$ . Если мы подобным же образом исключим  $r$  из уравнений строфоиды  $S$  и кривой (1) § 21, то получим также уравнение 4 степени

$$\left. \begin{aligned} & B_1^2 c_2 t^4 + (2c_2 A_1 B_1 - W_0 a_0 b_2 B_1 - a_0 c_2 B_1) t^3 + \\ & + [W_0 a_0^2 B_3 - W_0 a_0 a_2 B_1 + c_2 B_1^2 - W_0 a_0 b_2 A_1 + A_1 c_2 (A_1 - a_0)] t^2 + \\ & + (W_0 a_0^2 A_3 - W_0 a_0 a_2 A_1 + 2c_2 A_1 B_1 - a_0 c_2 B_1) t + c_2 A_1 (A_1 - a_0) = 0. \end{aligned} \right\} (3)$$

Корень  $t$  уравнения (1), удовлетворяющий уравнению (3), соответствует точке Бурместра 5-го порядка.

Задачу изучения точек Бурместра мы поставим таким образом. Допустим, что нам известно положение мгновенного центра  $O$  и точек  $W_0$  и  $W_1$ , а следовательно известны строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  и величины  $t_0$  и  $\tau_0$ . В уравнение (2) кроме координат точек  $W_0$  и  $W_1$  входят еще координаты точки  $W_2$ . Если мы будем менять положение точки  $W_2$ , то будут меняться коэффициенты уравнения (2) и положение точек Бурместра на строфоиде  $S$ . Но в нашем распоряжении только два параметра — координаты точки  $W_2$ , точек же Бурместра — четыре. Ясно, поэтому что эти точки все не могут занимать произвольного положения на строфоиде  $S$ , между ними должна быть некоторая связь, каковую и требуется изучить.

Обозначим через  $A, B, X, Y$  четыре точки Бурместра, через  $\Lambda, B, \Xi, \Pi$  — соответствующие им центры кривизны и через  $a, b, x, y$  — их изображения на окружности  $D$ , а вместе с тем и их угловые коэффициенты. Величины  $a, b, x, y$  суть корни уравнения (2). Те коэффициенты уравнения, которые не содержат координат точки  $W_2$  дают нам два равенства:

$$a + b + x + y = -t_0 - \tau_0, \quad (4)$$

$$abxy = t_0 \tau_0. \quad (5)$$

Они характеризуют связь, существующую между точками Бурместра, независящую от точки  $W_2$ , и служат основанием наших исследований.

§ 34. Пользуясь уравнениями (4) и (5) предыдущего параграфа, докажем следующие теоремы.

**Теорема I.** *Разделим изображения точек Бурместра на две пары  $ab$  и  $xy$ . Прямые  $ab$  и  $xy$  образуют пару лучей инволюции, основанием которой служат две точечные инволюции:  $y^2$ , расположенная на оси  $y$ , и  $D^2$ , расположенная на касательной  $D$ .*

Под инволюцией прямых на плоскости я подразумеваю такое соответствие. Возьмем две точечные инволюции  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  на прямых  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогда прямой  $\alpha_0 \beta_0$ , пересекающей  $\alpha$  и  $\beta$  в точках  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , будет соответствовать прямая  $\alpha_1 \beta_1$ , которая пересекает  $\alpha$  в точке  $\alpha_1$ , образующей пару с точкой  $\alpha_0$  в инволюции  $\alpha^2$ , и прямую  $\beta$  — в точке  $\beta_1$ , образующей пару с точкой  $\beta_0$  в инволюции  $\beta^2$ . Инволюции  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  устанавливают таким образом между прямыми плоскости соответствие, которое мы и называем инволюцией лучей на плоскости. Инволюции  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  служат для нее основанием.

Чтобы доказать теорему, обозначим абсциссы точек  $C_1$  и  $Z_1$ , в которых прямые  $ab$  и  $xy$  пересекают касательную  $D$ , через  $x_1$  и  $x_2$ ; по формуле (2) § 26

$$x_1 = \frac{D}{a + b}, \quad x_2 = \frac{D}{x + y}$$

и, принимая во внимание уравнение (4) § 33

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{t_0 + \tau_0}{D}.$$

Это равенство, будучи симметрично и первой степени относительно  $x_1$  и  $x_2$ , показывает нам, что точки  $C_1$  и  $Z_1$  образуют пару точек инволюции. Двойные точки инволюции определяются уравнением

$$x^2(t_0 + \tau_0) + 2Dx = 0,$$

из которого получаем:

$$x = 0, \quad x = -\frac{2D}{t_0 + \tau_0}.$$

Одна двойная точка находится, следовательно, в точке  $D$ , а другая  $n_0$ , как видно из формулы (2) § 26, получится, если мы продолжим прямую  $(-t_0, -\tau_0)$  до пересечения с касательной  $D$  в точке  $O_1 \left( -\frac{D}{t_0 + \tau_0}, D \right)$  и отложим по касательной отрезок  $Dn_0 = 2DO_1$ . Из этого построения следует, что точка  $O_1$  будет центром инволюции.

Таким образом на касательной  $D$  мы имеем инволюцию  $D^2$ , которая может быть задана ее центром  $O_1$  и двойной точкой  $D$ . Точки пересечения  $C_1$  и  $Z_1$  прямых  $ab$  и  $xy$  с касательной  $D$  образуют пару точек этой инволюции.

Обозначим через  $y_1$  и  $y_2$  ординаты точек  $C_0$  и  $Z_0$ , в которых прямые  $ab$  и  $xy$  пересекаются с осью  $y$ ; по формуле (2) § 26 мы имеем:

$$y_1 = D \frac{ab}{ab - 1}, \quad y_2 = D \frac{xy}{xy - 1}$$

или

$$ab = \frac{y_1}{y_1 - D}, \quad xy = \frac{y_2}{y_2 - D},$$

и принимая во внимание уравнение (5) § 33, получаем:

$$y_1 y_2 = t_0 \tau_0 (y_1 - D)(y_2 - D).$$

Это равенство также определяет инволюцию на оси  $y$ ; в ней мы имеем такую пару соответствующих точек:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = D; \quad y_1 = \infty, \quad y_2 = \frac{Dt_0\tau_0}{t_0\tau_0 - 1}.$$

Точка

$$O_0 \left( 0, \frac{Dt_0\tau_0}{t_0\tau_0 - 1} \right)$$

будет центром инволюции. Из формулы (2) § 26 следует, что точка  $O_0$  есть точка пересечения прямой  $(-t_0, -\tau_0)$  с осью  $y$ .

Таким образом на оси  $y$  мы имеем инволюцию  $y^2$ , которая может быть задана ее центром  $O_0$  и парой соответствующих точек  $O$  и  $D$ . Точки пересечения  $C_0$  и  $Z_0$  прямых  $ab$  и  $xy$  с осью  $y$  образуют пару точек этой инволюции.

Итак центры  $O_0, O_1$  инволюций  $y^2$  и  $D^2$  лежат на одной прямой с точками  $-t_0, -\tau_0$  (фиг. 28). Первая инволюция определяется двумя соответствующими точками  $O$  и  $D$ , а вторая — двойной точкой  $D$ . Прямые же  $ab$  и  $xy$  образуют пару лучей инволюции на плоскости, основанием которой служат  $y^2$  и  $D^2$ .

Проективная геометрия дает различные способы построить пары соответствующих точек инволюций  $y^2$  и  $D^2$  (см. задача I § 37). Но связь между точками  $C_0, C_1$ , с одной стороны, и точками  $Z_0$  и  $Z_1$  — с другой, может быть установлена и при помощи равенств (4) и (5) § 33. Перепишем их таким образом:

$$a + b + t_0 = -(x + y + \tau_0), \quad \frac{ab}{t_0} = \frac{\tau_0}{xy}$$

и обозначим для краткости:

$$\frac{ab}{t_0} = \frac{1}{c}, \quad a + b + t_0 = -d.$$

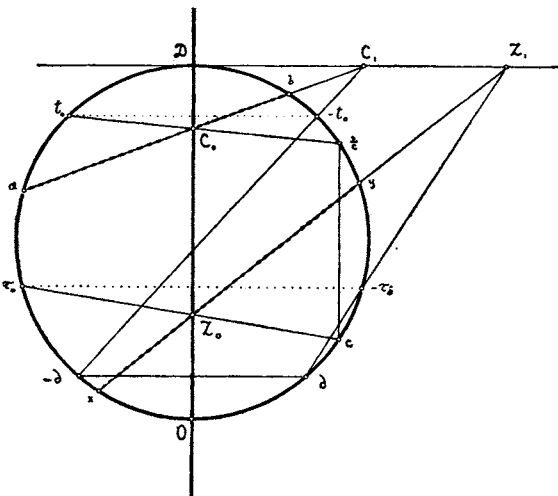
Тогда

$$\frac{xy}{\tau_0} = c, \quad x + y + \tau = d.$$

По правилам § 26 (задачи 2 и 3)

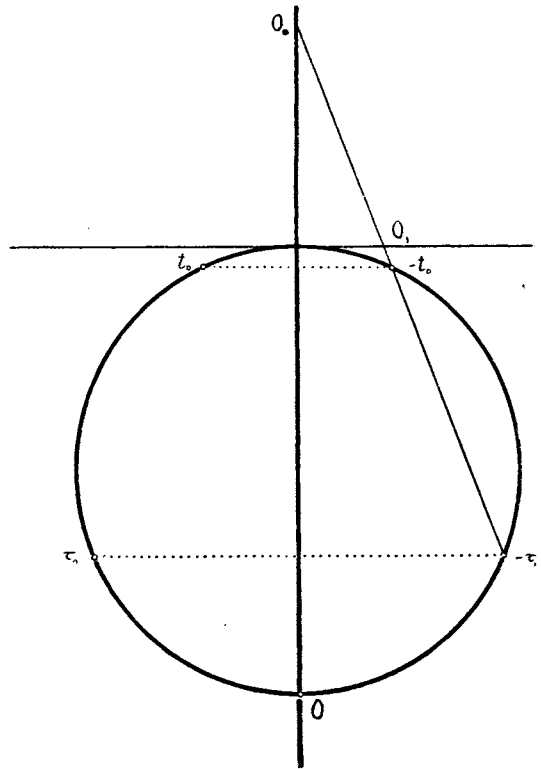
точки  $\frac{1}{c}$  и  $c$  (фиг. 29) мы получим,

продолжая прямые  $t_0C_0$  и  $\tau_0Z_0$  до пересечения с окружностью  $D$ ; точки же



Фиг. 29.

пересекут окружность  $D$  в точках  $\frac{1}{c}$  и  $c$ , лежащих на прямой параллельной оси  $y$ ; прямые  $(-t_0, C_1), (-\tau_0, Z_1)$  пересекут окружность  $D$  в точках  $-d$  и  $d$ , лежащих на прямой параллельной оси  $x$ .



Фиг. 28.

$$d = x + y - (-\tau_0) \quad \text{и} \quad -d = a + b - (-t_0)$$

суть точки, в которых окружность  $D$  пересечется с прямыми  $(C_1, -t_0)$  и  $(Z_1, -\tau_0)$ . Так как точки  $c$  и  $\frac{1}{c}$  лежат на прямой параллельной оси  $y$ , а точки  $d, -d$  — на прямой, параллельной оси  $x$ , то мы имеем такую теорему:

**Теорема II.** Пусть прямые  $ab$  и  $xy$  пересекают ось  $y$  и касательную  $D$  соответственно в точках  $C_0C_1$  и  $Z_0Z_1$ . Прямые  $t_0C_0$  и  $\tau_0Z_0$  пересекут окружность  $D$  в точках  $\frac{1}{c}$  и  $c$ , лежащих на прямой параллельной оси  $y$ ; прямые  $(-t_0, C_1), (-\tau_0, Z_1)$  пересекут окружность  $D$  в точках  $-d$  и  $d$ , лежащих на прямой параллельной оси  $x$ .



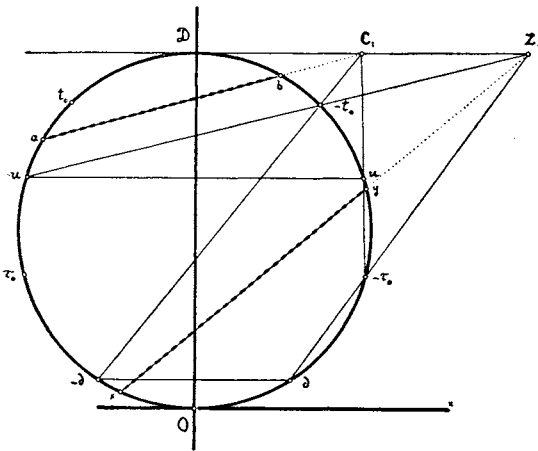
**Следствие.** Из этой теоремы можно вывести два следствия. Если бы мы вместо прямых  $(C_1, -t_0)$ ,  $(Z_1, -\tau_0)$  (фиг. 30) провели прямые  $(C_1, -\tau_0)$  и  $(Z_1, -t_0)$ , то в пересечении их с окружностью  $D$  мы получили бы точки  $a + b + \tau_0$  и  $x + y + t_0$ , которые, вследствие равенства:

$$(a + b + \tau_0) = -(x + y + t_0)$$

вытекающего из (4) § 33, будут лежать также на прямой, параллельной оси  $x$ . Положим для краткости  $a + b + \tau_0 = u$ , тогда  $x + y + t_0 = -u$ . Проведенные нами линии образуют шестиугольник:

$$-t_0, -d, d, -\tau_0, u, -u, -t_0.$$

Две его противоположные стороны  $(-t_0, -d)$  и  $(-\tau_0, u)$  пересекаются в точке  $C_1$  касательной  $D$ ; противоположные стороны  $(-t_0, -u)$  и  $(-\tau_0, d)$  пересекаются в точке  $Z_1$  касательной  $D$ , и, наконец, противоположные стороны  $(-d, d)$  и  $(-u, u)$



Фиг. 30.

параллельны касательной  $D$ . Для шестиугольника Паскалевой линией служит, следовательно, касательная  $D$ ; прямая  $ab$  проходит через  $C_1$ , прямая  $xy$  — через  $Z_1$ .

Другое аналогичное следствие будет играть у нас большую роль; ему мы посвятим следующие параграфы.

**Задача.** Для данного положения линии  $ab$  построить соответствующее положение линии  $xy$  (фиг. 29).

Пусть прямая  $ab$  пересекает ось  $y$  в точке  $C_0$  и касательную  $D$  в точке  $C_1$ . Проведя прямую  $(C_1, -t_0)$ , продолжаем ее до пересечения с окружностью  $D$ ; мы получим точку  $a + b + t_0 = -d$ . Через нее ведем линию, параллельную оси  $x$ , до пересечения с окружностью  $D$  в точке  $d$ . Прямая, соединяющая эту последнюю с точкой  $-\tau_0$ , пересечет касательную  $D$  в точке  $Z_1$ .

Определяем затем точку  $\frac{1}{c}$ , в которой прямая  $C_0t_0$  пересекается с окружностью  $D$ ; через нее ведем линию, параллельную оси  $y$ , до пересечения с окружностью в точке  $c$ . Прямая, соединяющая точку  $c$  с  $\tau_0$ , пересечет ось  $y$  в точке  $Z_0$ . Прямая  $Z_0Z_1$  и будет искомой прямой  $xy$ .

§ 35. Так как строфоида  $S$  есть кривая третьего порядка, то прямые  $AB$  и  $XU$  пересекут ее в точках  $C$  и  $Z$ ; пусть их изображения суть  $c$  и  $z$ .

**Теорема I.** Прямая, соединяющая точки  $C$  и  $Z$ , проходит через точку  $Walva$ ,  $T_0$ . Точка пересечения прямых  $cz$  и  $(t_0, \frac{1}{\tau_0})$  лежит на оси  $y$  и совпадает с  $W_0$ , если  $D = D_0$ .

Действительно, по теореме II § 30

$$abc = t_0, \quad xyz = t_0. \quad (1)$$

Принимая во внимание эти равенства, умножая (5) § 33 на  $cz$ , мы получаем:

$$cz\tau_0 = t_0. \quad (2)$$

Это равенство на основании той же теоремы II § 30 показывает нам, что три точки  $C$ ,  $Z$  и точка Валиа  $T_0$ , изображением которой служит  $\tau_0$ , лежат на одной прямой. Кроме того так как

$$cz = t_0 \cdot \frac{1}{\tau_0},$$

то прямые  $cz$  и  $\left(t_0, \frac{1}{\tau_0}\right)$  пересекаются на оси  $y$  (теорема II § 21). Точка пересечения будет  $W_0$ , если  $D = D_0$  (теорема I § 31).

Соединим центры кривизны  $A$ ,  $B$  и  $\Xi$ ,  $\Pi$ , соответствующие точкам Бурместра, прямыми  $AB$  и  $\Xi\Pi$ , продолжим их до пересечения со строфоидой  $\Sigma$  в точках, которые обозначим через  $1/\Gamma$  и  $1/Z$ , и докажем теорему, соответствующую предыдущей.

**Теорема II.** *Прямая, соединяющая точки  $1/\Gamma$  и  $1/Z$ , проходит через точку  $T_0$ .* Действительно, из равенств (1) и (2) мы имеем:

$$\tau_0 = ab \cdot \frac{1}{z}, \quad \tau_0 = xy \cdot \frac{1}{c}, \quad \tau_0 = t_0 \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{z}. \quad (3)$$

Применяя к строфоиде  $\Sigma$  теорему II § 30, мы видим из первого равенства, что точки строфоиды  $\Sigma$ , которые соответствуют  $a$ ,  $b, \frac{1}{z}$ , лежат на одной прямой линии. Но точки  $a$  и  $b$  служат изображениями точек  $A$  и  $B$  строфоиды  $\Sigma$ , следовательно  $\frac{1}{z}$  должна соответствовать точке  $1/Z$ , в которой линия  $AB$  пересекает строфоиду  $\Sigma$ . Также из второго равенства следует, что  $\frac{1}{c}$  будет изображением точки  $1/\Gamma$ . Из последнего равенства заключаем, что точки  $1/\Gamma$ ,  $1/Z$ ,  $T_0$  лежат на одной прямой.

**Теорема III.** *Если точки Бурместра мы разделим на две пары  $A, B$  и  $X, Y$ , точки пересечения прямых  $AB$  и  $XY$  со строфоидой  $S$  обозначим через  $C$  и  $Z$ , то для шестиугольника:*

$$t_0, \frac{1}{c}, c, \tau_0, z, \frac{1}{z}, t_0$$

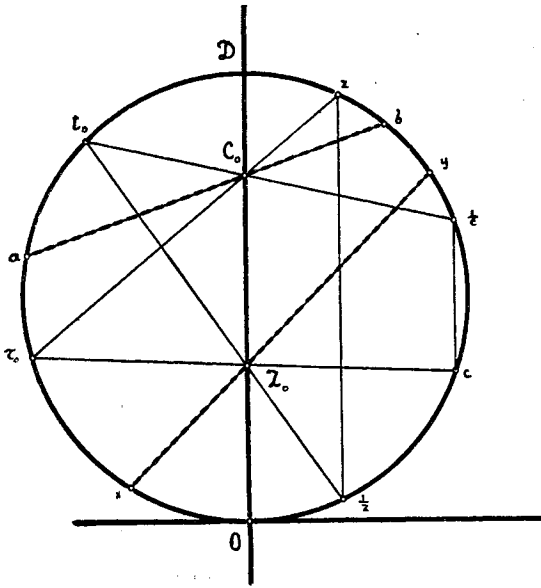
*Паскалевой линией будет ось  $y$ . Противоположные стороны его  $\left(t_0, \frac{1}{c}\right)$  и  $(\tau_0, z)$  пересекутся в точке  $C_0$  оси  $y$ , противоположные стороны  $\left(t_0, \frac{1}{z}\right)$  и  $(\tau_0, c)$  пересекутся в точке  $Z_0$  оси  $y$ , противоположные стороны  $\left(c, \frac{1}{c}\right)$  и  $\left(z, \frac{1}{z}\right)$  параллельны оси  $y$ . Прямая  $ab$  проходит через  $C_0$ , прямая  $xy$  — через  $Z_0$ .*

В самом деле, из равенств (1) и (2) мы имеем:

$$ab = \tau_0 z = t_0 \frac{1}{c}, \quad (4)$$

$$xy = \tau_0 c = t_0 \frac{1}{z}. \quad (5)$$

Равенства (4) показывают нам, что прямые  $(ab)$ ,  $(\tau_0 z)$ ,  $(t_0, \frac{1}{c})$  (фиг. 31) пересекаются в одной и той же точке оси  $y$ , которую мы и обозначаем буквой  $C_0$  (теорема II § 26). Подобным же образом равенства (5) показывают, что прямые  $(xy)$ ,  $(\tau_0 c)$ ,  $(t_0, \frac{1}{z})$  пересекаются также в одной и той же точке оси  $y$ , которую мы обозначим через  $Z_0$ . Из теоремы I, 1 § 26 мы знаем, что прямые  $(c, \frac{1}{c})$  и  $(z, \frac{1}{z})$  параллельны оси  $y$ . Поэтому если мы построим шестиугольник  $t_0, \frac{1}{c}, c, \tau_0, z, \frac{1}{z}, t_0$ , то он будет обладать указанными в теореме свойствами, и прямые  $ab$  и  $xy$  пройдут через точки  $C_0$  и  $Z_0$  соответственно.



Фиг. 31.

Треугольнику  $abc$  соответствует прямая  $ABC$ ,  
 "  $xyz$  " "  $XYZ$ ,  
 "  $\tau_0 cz$  " "  $T_0 CZ$ .

Те же точки  $\tau_0, t_0, a, b, x, y, \frac{1}{z}, \frac{1}{c}, z, c$  служат изображением следующих точек строфоиды  $\Sigma$ : бесконечно удаленной точки  $T_0$  центров кривизны  $A, B, E, H$ , соответствующих точкам Бурместра, точек  $1/Z, 1/\Gamma$  пересечения прямых  $AB$  и  $\Xi H$  со строфоидой и двух точек, которые обозначим через  $\frac{Z}{\Gamma}$  и  $\frac{\Gamma}{Z}$ . По теореме II, 1 § 30 прямые  $(\Gamma, \frac{1}{\Gamma})$  и  $(Z, \frac{1}{Z})$  параллельны асимптоте строфоиды  $\Sigma$ .

Треугольнику  $ab \frac{1}{z}$  соответствует прямая  $AB \frac{1}{z}$ ,  
 "  $xy \frac{1}{c}$  " "  $\Xi H \frac{1}{\Gamma}$ ,  
 "  $t_0 \frac{1}{z} \frac{1}{c}$  " "  $T_0 \frac{1}{Z} \frac{1}{\Gamma}$ .

§ 36. Остановимся подробнее на свойствах фигуры, образованной шестиугольником, о котором говорится в предыдущем параграфе, и прямыми  $ab$  и  $xy$ .

1. Точки  $t_0, \tau_0, a, b, x, y, c, z, \frac{1}{c}, \frac{1}{z}$  служат изображениями следующих точек строфоиды  $S$ : бесконечно удаленной, точки Вальа  $T_0$ , точек Бурместра  $A, B, X, Y$ , точек  $C$  и  $Z$  пересечения строфоиды с прямыми  $AB$  и  $XY$  и двух точек, которые обозначим через  $\frac{1}{C}$  и  $\frac{1}{Z}$ .

По теореме II, 1 § 30 прямые  $(C, \frac{1}{C})$  и  $(Z, \frac{1}{Z})$  параллельны асимптоте строфоиды  $S$ .

2. Так как прямые  $ABC$  и  $CZT_0$  проходят через одну и ту же точку  $C$ , то по теореме  $V_6$  § 30 мы имеем первое из равенств:

$$\begin{aligned} \angle ACT_0 &= \angle aC_0\tau_0 \\ \angle XZT_0 &= \angle xZ_0\tau_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Так же доказывается и второе. Аналогично с этими равенствами для строфиды  $\Sigma$  имеем:

$$\begin{aligned} \angle A \frac{1}{Z} T_0 &= \angle aC_0t_0, \\ \angle \Xi \frac{1}{\Gamma} T_0 &= \angle xZ_0t_0. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Проведем прямую  $De'$  параллельную  $ab$ . Мы видели, что треугольник  $abc$  соответствует прямой  $ABC$ , а треугольник  $ab \frac{1}{z}$  — прямой  $AB \frac{1}{Z}$ . Поэтому, на основании теоремы III, 4 § 30, прямые  $c'e$  и  $c' \frac{1}{z}$  будут параллельны соответственно с прямыми  $ABC$  и  $AB \frac{1}{Z}$  и

$$\angle(AB, AB) = \angle\left(\frac{1}{z} c'e\right) = \angle\left(\frac{1}{z} Oc\right);$$

иначе говоря угол  $(AB, AB)$  измеряется половиной дуги  $\left(\frac{1}{z}, c\right)$ .

Проведем прямую  $Dz'$  параллельную  $xy$  и, рассуждая таким же образом, докажем:

$$\angle(\Xi\Pi, XY) = \angle\left(\frac{1}{c} Oz\right),$$

т. е. измеряется половиной дуги  $\left(\frac{1}{c}, z\right)$ .

Наконец по теореме III, 5 § 30, угол  $\angle OT_0C$  измеряется половиной дуги  $\left(\frac{1}{c}, z\right) = \left(\frac{1}{z}, c\right)$ , а угол  $\angle OT_0 \frac{1}{Z}$  измеряется половиной дуги  $\left(z, \frac{1}{c}\right) = \left(c, \frac{1}{z}\right)$ .

Таким образом,

$$\angle OT_0C = \angle(AB, AB) = \angle(\Xi\Pi, XY) = -\angle OT_0 \frac{1}{Z} \quad (3)$$

все измеряются половиной дуги  $\left(\frac{1}{c}, z\right) = \left(\frac{1}{z}, c\right)$ .

4. Из последних равенств получаем:

$$\angle(AB, \Xi\Pi) = \angle(AB, XY). \quad (4)$$

Это равенство можно получить иначе. Вследствие того, что прямые  $ABC$  и  $XYZ$  соответственно параллельны прямым  $c'e$  и  $z'z$ , угол  $(AB, XY)$  будет измеряться полусуммой дуг:

$$(c'z') + (cz).$$

Угол же между прямыми  $AB \frac{1}{Z}$  и  $\Xi H \frac{1}{\Gamma}$ , соответственно параллельными с  $(c' \frac{1}{z})$  и  $(z' \frac{1}{c})$  — полусуммой дуг:

$$\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{c}\right) + (c'z')$$

равной предыдущей.

Ниже мы увидим, что из равенства (4) следует одна теорема П. Л. Чебышева (см. § 40).

5. Если за окружность  $D$  мы примем основную окружность  $D_0$ , т. е.  $D = D_0$ , то линия  $CZT_0$  будет линией Симпсона для треугольника  $c\tau_0$ . Нам известны точки  $C_0$  и  $Z_0$  пересечения его сторон  $c\tau_0$  и  $c\tau_0$  с осью  $y$ . Что же касается точки пересечения с осью  $y$  третьей стороны  $c\tau_0$ , то по теореме I § 35 она совпадет с точкой  $W_0$ . Принимая во внимание теоремы II § 27 и III § 30, мы приходим таким образом к такому результату:

Если  $D = D_0$ , то подошвы перпендикуляров, опущенных из точек  $C_0, Z_0, W_0$  на лучи  $Oc, Oz, O\tau_0$ , будут точками  $C, Z, T_0$ .

Если бы  $D = \Delta_0$ , то линией Симпсона для треугольника  $t_0, 1/c, 1/z$  была бы линия  $T_0, 1/\Gamma, 1/Z$  и прямая  $(1/c, 1/z)$  пересекла бы ось  $y$  в точке —  $W_0$ . Тогда точки  $T_0, 1/\Gamma, 1/Z$  будут подошвами перпендикуляров, опущенных из точек —  $W_0, Z_0, C_0$  на лучи  $Ot_0, (O, 1/c)$  и  $(O, 1/z)$ .

**§ 37.** В § 33 мы говорили, что в том случае, когда нам даны строфоиды  $S$  и  $\Sigma$ , положение точек Бурместра на строфоиде  $S$  зависит от двух параметров  $W_{2x}$  и  $W_{2y}$ . Мы можем, поэтому, две точки Бурместра  $A$  и  $B$  выбрать произвольно; тем самым положение двух других будет вполне определено. Будем менять положение точек  $A$  и  $B$  так, чтобы прямая  $AB$  всегда проходила через одну и ту же точку  $C$  строфоиды  $S$ , т. е. будем поворачивать прямую  $ABC$  вокруг точки  $C$  и заставим ее описывать пучок  $(C)AB$ . При этом точки  $t_0, \tau_0, c$  будут оставаться неподвижными, и шестиугольник  $t_0, \frac{1}{c}, c, \tau_0, z, \frac{1}{z}, t_0$  не будет менять своего вида, ибо он вполне определяется тремя точками  $t_0, \tau_0, c$ . Точки  $C_0, Z_0, z$  и соответствующая ей точка  $Z$  тоже будут оставаться неподвижными; прямые же  $ZXY, (C_0)ab, (Z_0)xy$ , вращаясь вокруг этих точек, будут описывать пучки  $(Z)XY, (C_0)ab, (Z_0)xy$ .

**Теорема I.** Пучки  $(C_0)ab, (Z_0)xy$  перспективны, пучки  $(C)AB$  и  $(Z)XY$  перспективны.

Действительно, мы знаем, что точки  $C_1$  и  $Z_1$ , в которых прямые  $ab$  и  $xy$  пересекают касательную  $D$ , образуют инволюцию  $D^2$ , с двойными точками  $D$  и  $n_0$  (теорема I § 34). Поэтому пучки  $(C_0)ab$  и  $(Z_0)xy$  будут перспективны. Но когда прямая  $ab$ , вращаясь вокруг  $C_0$ , совпадет с осью  $y$ , точка  $C_1$  пересечения ее с касательной  $D$  совпадет с точкой  $D$ . Так как эта точка двойная в инволюции  $D^2$ , то точка  $Z_1$  также совпадет с  $D$ , а прямая  $Z_0xy \equiv Z_0Z_1$  — с осью  $y$  и с прямой  $C_0ab$ . Пучки  $(C_0)ab$  и  $(Z_0)xy$  имеют общий луч и, следовательно, перспективны. Точки пересечения соответствующих лучей этих пучков лежат на одной прямой — на перспективной оси.

Но на основании теоремы  $V_a$  § 30 пучки  $(C)AB$  и  $(Z)XY$  соответственно перспективны с пучками  $(C_0)ab$  и  $(Z_0)xy$ , а потому пучки  $(C)AB$  и  $(Z)XY$  будут перспективны.

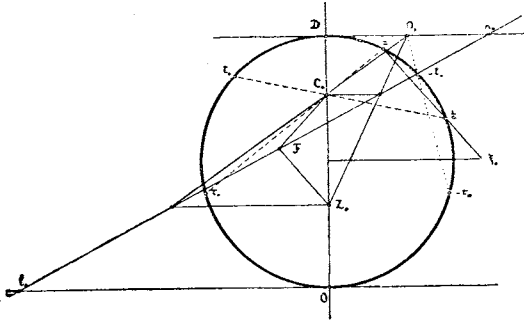
Перспективность пучков  $(C_0)ab$  и  $(Z_0)xy$  можно доказать еще иначе. Напишем уравнения линий  $ab$  и  $xy$  (форм. (1) § 26):

$$\begin{aligned} \eta(1 - ab) &= \xi(a + b) - Dab, \\ \eta(1 - xy) &= \xi(x + y) - Dxy, \end{aligned}$$



прямых  $n_0C_0$  и  $n_0Z_0$ . Точка  $m_0$ , в которой перспективная ось пересечет ось  $y$ , будет гармонично сопряжена с точкой  $D$  относительно точек  $C_0$  и  $Z_0$ .

**Задача 2.** Построить перспективную ось. Для решения задачи достаточно найти две точки перспективной оси. Мы отметим на ней следующие точки (фиг. 33).



Фиг. 33.

1. Мы сейчас видели, как построить точки  $n_0$  и  $m_0$  пересечения перспективной оси с касательной  $D$  и с осью  $y$ .

2. Полагая в уравнении (1) перспективной оси  $\eta = 0$ , мы получим абсциссу точки  $l_0$  пересечения ее с осью  $x$ :

$$l_0 = -D \frac{c+z}{1+cz};$$

чтобы ее построить, определим абсциссу

$\xi_0$  точки пересечения прямой  $(c, \frac{1}{z})$  [уравнение (1) § 26]:

$$(cz+1)\xi + (c-z)\eta - Dc = 0$$

с диаметром  $y = \frac{D}{2}$  окружности  $D$ , параллельным оси  $x$ :

$$\xi_0 = \frac{D}{2} \frac{c+z}{1+cz}.$$

Из этих формул

$$l_0 = -2\xi_0.$$

3. Если линия  $ab$  будет параллельна прямой  $(c, \frac{1}{z})$  и, следовательно, их угловые коэффициенты будут равны [форм. (3) § 26]:

$$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{c+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1+cz}{z-c},$$

то

$$a+b = (1-ab) \frac{1+cz}{z-c},$$

$$x+y = -a-b-t_0-\tau_0 = (ab-1) \frac{1+cz}{z-c} - \frac{t_0}{cz} (1+cz) = (1+cz) \frac{xy-1}{z-c},$$

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{1+cz}{c-z} = \frac{x+1/c}{1-z/c}$$

и прямая  $xy$  будет параллельна прямой  $(z, 1/c)$ .

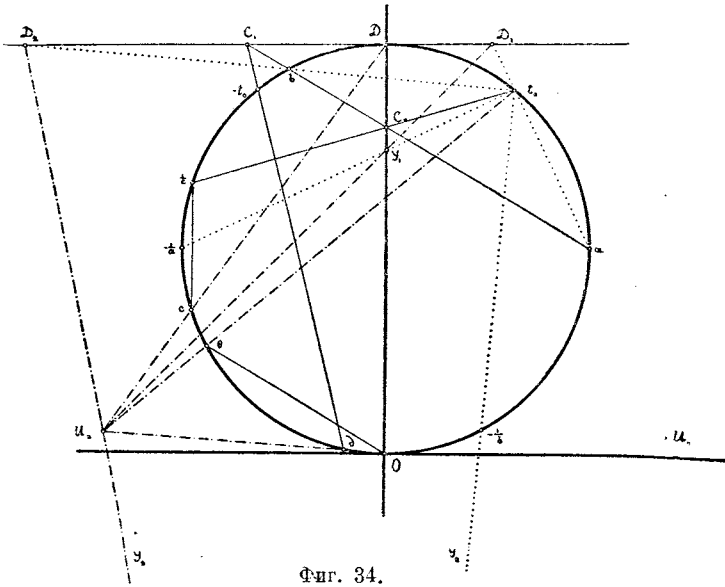
**Теорема III.** Если прямая  $ab$  параллельна диагонали  $(c, 1/z)$ , то прямая  $xy$  параллельна диагонали  $(z, 1/c)$ .

Пользуясь этим, мы можем построить еще одну точку перспективной оси: проводим через  $C_0$  линию, параллельную прямой  $(c, \frac{1}{z})$ , и через  $Z_0$  — линию па-

параллельно прямой  $\left(z, \frac{1}{c}\right)$ ; точка их пересечения  $I$  будет точкой перспективной оси.

4. Если мы соединим точки  $C_0$  и  $Z_0$  с центром  $O_1$  инволюции  $D^2$  и через  $C_0$  и  $Z_0$  проведем линии, параллельные  $D$ , то получим трапецию, диагональю которой будет перспективная ось. Ибо когда одна из прямых  $ab$  или  $xu$  проходит через  $O_1$ , то другая прямая будет параллельна касательной  $D$ .

**§ 38.** Задачу изучения свойств точек Бурместра мы можем поставить иначе, чем в §§ 33 и 37. Допустим, что нам дана строфоида  $S$  и величина  $t_0$ , положение же точки  $W_2$  и строфоида  $\Sigma$ , а следовательно величина  $\tau_0$  остаются неопределенными. В уравнении (2) § 33, которым определяется положение точек Бурместра на строфоиде  $S$ , будет три неопределенных параметра  $\frac{a_0 A_2}{B_1^2}$ ,  $\frac{a_0 B_2}{B_1^2}$ ,  $\tau_0$ . Приняв какие-нибудь две точки  $A$  и  $B$  строфоиды  $S$  за точки Бурместра, мы можем фиксировать два из них, напр.  $\frac{a_0 A_2}{B_1^2}$  и  $\frac{a_0 B_2}{B_1^2}$ , и тогда положение двух других точек Бурместра  $X$  и  $Y$  будет зависеть только от одного параметра  $\tau_0$ . Ме-



Фиг. 34.

жду  $X$ ,  $Y$  а также между их изображениями  $x$ ,  $y$  на окружности  $D$  должна существовать некоторая зависимость.

Исключая из уравнений (4) и (5) § 33 переменный параметр  $\tau_0$ , мы получим уравнение

$$abxy + (a + b + x + y)t_0 + t_0^2 = 0, \quad (1)$$

которое показывает нам, что изображения  $x$  и  $y$  точек  $X$  и  $Y$  образуют на окружности  $D$  инволюцию.

**Теорема.** Если на окружности  $D$  нам даны точки  $t_0$ ,  $a$ ,  $b$ , и точки  $a$ ,  $b$  служат изображениями двух точек Бурместра, то изображения двух точек Бурместра,  $x$ ,  $y$ , соответствующие различным значениям  $\tau_0$ , образуют инволюцию (1).

Чтобы построить центр этой инволюции, нам надо знать по крайней мере две пары соответствующих точек.

Отметим следующие пары (фиг. 34).



1. Если  $x = 0$ , то  $y_1 = -a - b - t_0 = -d$ .

2. Если  $x = \infty$ , то  $y_2 = -\frac{t_0}{ab} = -c$ .

3. Если  $x = -t_0$ , то  $y_3 = -\frac{a+b}{1-ab} = -\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = -\gamma$ ,

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ —полярные углы точек  $a$  и  $b$ . Линии  $(O, y_1)$ ,  $(D, -c)$ ,  $(-t_0, -\gamma)$  должны пройти через центр инволюции  $U_0$ . Вместо этих точек, однако, удобнее взять точки симметричные с ними по отношению к оси  $y$ :

1.  $O, y_1 = a + b + t_0 = d$ .

2.  $\infty, -y_2 = c$ .

3.  $t_0, \operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \gamma$ .

Прямые, соединяющие эти точки, пересекутся в точке  $-U_0$ , симметричной с  $U_0$  относительно оси  $y$ .

Точка  $c$  нам известна. Точку  $\gamma$  мы получим, если определим пересечение окружности  $D$  с прямой, проведенной через начало параллельно линии  $ab$ . Наконец, чтобы построить точку  $-d$ , продолжаем линию  $ab$  до пересечения в точке  $C_1$  с касательной  $D$  и соединяем прямой точку  $C_1$  с точкой  $-t_0$ . Точка пересечения этой прямой с окружностью  $D$  и будет точкой  $d$ .

Можно дать другое, более симметричное построение точки  $-U_0$ . Нетрудно проверить, что пары  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , которые удовлетворяют уравнениям

$$x_1 + y_1 = -t_0 - a, \quad x_1 y_1 = -\frac{t_0}{a}$$

и

$$x_2 + y_2 = -t_0 - b, \quad x_2 y_2 = -\frac{t_0}{b}$$

будут удовлетворять также уравнению (1) и определяют две пары соответствующих точек инволюции и затем и точку  $U_0$ . Но нам опять удобнее взять точки симметричные с этими относительно оси  $y$ . Они будут определяться уравнениями

$$(-x_1) + (-y_1) = t_0 + a, \quad (-x_1)(-y_1) = t_0 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right),$$

$$(-x_2) + (-y_2) = t_0 + b, \quad (-x_2)(-y_2) = t_0 \cdot \left(-\frac{1}{b}\right).$$

При помощи их мы получим точку  $-U_0$  следующим образом (см. задачу 3 § 26). Определим точку  $D_1$  пересечения прямой  $t_0 a$  с касательной  $D$  и  $Y_1$  пересечения прямой  $\left(t_0, -\frac{1}{a}\right)$  с осью  $y$ . Прямая  $D_1 Y_1$  пройдет через точку  $-U_0$ . Определим точку  $D_2$  пересечения прямой  $t_0 b$  с касательной  $D$  и точку  $Y_2$  пересечения прямой  $\left(t_0, -\frac{1}{b}\right)$  с осью  $y$ . Прямая  $D_2 Y_2$  также пройдет через точку  $-U_0$ . Прямые  $D_1 Y_1$  и  $D_2 Y_2$  пересекутся в точке  $-U_0$ .

Когда нам известен центр  $U_0$ , то любая прямая, через него проходящая, пересечет окружность  $D$  в двух точках,  $x, y$ , которые мы и можем принять за изображения двух точек Бурместра  $X$  и  $Y$ . Соответствующее значение  $\tau_0$  мы получим, построив шестигульник  $t_0, \frac{1}{c}, c, \tau_0, z, \frac{1}{z}, t_0$ . Построение его возможно, ибо

кроме вершин  $t_0$ ,  $1/c$ ,  $c$  мы знаем точку  $Z_0$  пересечения прямой  $xy$  с осью  $y$ , — точку, через которую должны пройти стороны  $c\tau_0$  и  $(t_0, 1/z)$ .

§ 39. Вернемся снова к рассмотрению условия (B) (§ 21):

$$a_0 A_2 = A_1 a_1 - B_1 b_1, \quad (B)$$

которое может быть приведено к виду

$$\frac{a_0 A_2}{B_1^2} = 2(t_0 + 3\tau_0). \quad (B)$$

При соблюдении этого условия, кроме двух соотношений

$$a + b + x + y = -t_0 - \tau_0, \quad (1)$$

$$abxy = t_0\tau_0, \quad (2)$$

между  $a$ ,  $b$ ,  $x$ ,  $y$  мы имеем еще одно. В самом деле коэффициент при  $t$  уравнения (2) § 33 вследствие равенства (B) обращается в

$$\frac{a_0 A_2}{B_1^2} - t_0 - 5\tau_0 = t_0 + \tau_0$$

и делается равным коэффициенту при  $t^3$ . Поэтому

$$a + b + x + y = ab(x + y) + xy(a + b)$$

или

$$(a + b)(1 - xy) + (x + y)(1 - ab) = 0. \quad (3)$$

В это равенство входят только  $a$ ,  $b$ ,  $x$ ,  $y$ , но не  $t_0$ ,  $\tau_0$ ,  $c$ ,  $z$ ; условие (B) не налагает, следовательно, никаких ограничений на шестиугольник  $t_0, \frac{1}{c}, c, \tau_0, z, \frac{1}{z}, t_0$ , а устанавливает только некоторую зависимость между прямыми  $ab$  и  $xy$ .

**Теорема I.** Условие (B), эквивалентное равенству (3), не налагает никаких ограничений на шестиугольник  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$ . При соблюдении его направления линий  $ab$  и  $xy$  симметричны относительно координатных осей, и сумма полярных углов точек Бурместра равна нулю.

Вторая половина теоремы представляет собой не что иное, как геометрическое толкование равенства (3). Действительно, угловые коэффициенты прямых  $ab$  и  $xy$  по формуле (3) § 26 соответственно равны

$$\frac{a + b}{1 - ab}, \quad \frac{x + y}{1 - xy}$$

а равенство (3) можно переписать таким образом:

$$\frac{a + b}{1 - ab} + \frac{x + y}{1 - xy} = 0 \quad (4)$$

или

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) + \operatorname{tg}(\varphi_3 + \varphi_4) = 0,$$

откуда

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0,$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  обозначают полярные углы точек Бурместра.

**Теорема II.** При соблюдении условия (B) прямая  $ab$  параллельна диагонали  $(c, \frac{1}{z})$  и прямая  $xu$  параллельна диагонали  $(z, 1/c)$  шестиугольника  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$ .

Действительно, переписав равенство (3) таким образом:

$$\frac{a+b}{1-ab} = -\frac{x+y}{1-xy},$$

по теореме о сложной пропорции, мы имеем:

$$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{a+b+x+y}{xy-ab} = -\frac{t_0+\tau_0}{(c-z)t_0} = -\frac{\tau_0(1+cz)cz}{\tau_0(c-z)cz} = \frac{1+cz}{z-c}$$

или

$$\frac{a+b}{1-ab} = \frac{c+1/z}{1-c/z}, \tag{5}$$

и затем

$$\frac{x+y}{1-xy} = \frac{z+1/c}{1-z/c}. \tag{6}$$

Последние два равенства и доказывают теорему.

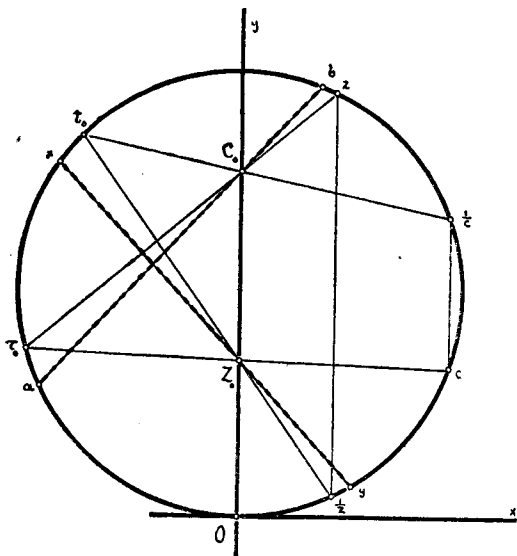
Заметим, что эту теорему можно рассматривать как следствие теоремы I и свойства перспективной оси (теорема III, § 37).

**Теорема III.** При соблюдении условия (B) углы  $\angle ACO, \angle COZ$  и  $\angle OZX$  равны между собой.

Действительно, на основании теоремы III, § 31 угол  $OCA$  измеряется половиной дуги  $(\frac{1}{a}, b)$  (фиг. 35), которая, как нетрудно видеть, вследствие параллельности  $ab$  с  $(c, 1/z)$  будет равна дуге  $zc$ . Угол  $OZX$  измеряется половиной дуги  $(1/x, y)$  равной, вследствие параллельности  $xu$  и  $(z, 1/c)$ , дуге  $cz$ . Наконец, угол  $COZ$  измеряется также половиной дуги  $cz$ . Таким образом, половина дуги  $cz$  измеряет все углы

$\angle ACO, \angle COZ, \angle OZX$ ; эти углы, следовательно, равны (фиг. 36).

Теорему можно доказать иначе. Прямая, проведенная через точку  $1/c$ , параллельная  $ab \parallel (c, 1/z)$  (фиг. 37), пересекает окружность  $D$  в точке  $t_a$ , определяющей угловой коэффициент прямой  $ABC$ . Прямая  $Ot_a$  параллельна  $ABC$ , и угол  $\angle ACO$  измеряется половиной дуги  $(t_a, c)$ . Прямая, проходящая через  $1/z$  и па-



Фиг. 35.

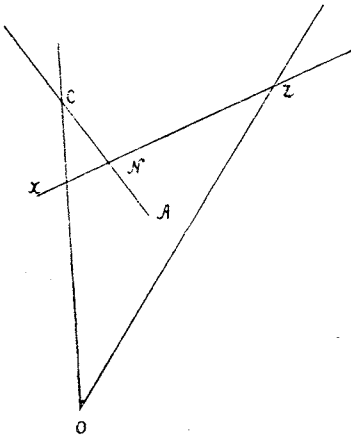
параллельная  $xy \parallel (z, 1/c)$ , пересечет окружность  $D$  в точке  $t_x$ . Прямая  $XYZ$  параллельна  $Ot_x$  (теорема III, 5 § 30) и угол  $\angle OZ X$  измеряется половиной дуги  $(zt_x)$ . Наконец, угол  $COZ$  измеряется половиной дуги  $(cz)$ . Но из построения видно, что дуги  $(t_x c)$ ,  $(cz)$   $(zt_x)$ , будучи равны дуге  $(1/z, 1/c)$ , равны между собой.

Эта теорема, как увидим дальше, представляет собой обобщение одной теоремы Чебышева.

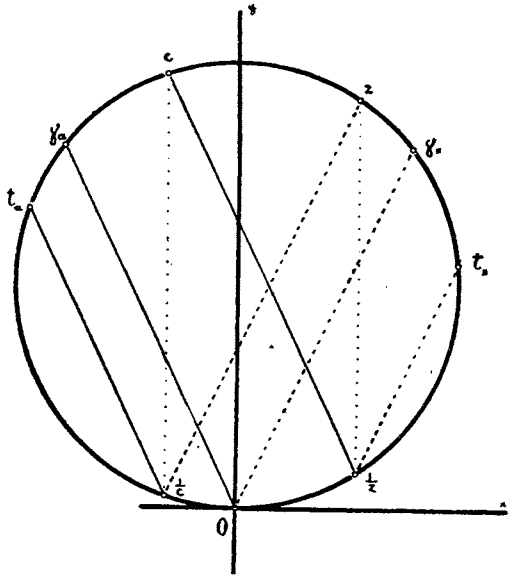
**Следствие.** Соединим точку  $N$  (фиг. 36) пересечения прямых  $ABC$  и  $XYZ$  с точкой  $O$  и разобьем четырехугольник  $OCNZ$  на два треугольника  $OCN$  и  $ONZ$ . По теореме о внешнем угле треугольника найдем, что

$$\angle(AB, XY) = \angle(AB, \Xi H) = 3 \angle COZ. \quad (7)$$

В справедливости этого равенства можно убедиться также, рассматривая чертеж 37. Прямые  $ABC$  и  $XYZ$  соответственно параллельны прямым  $Ot_a$  и  $Ot_x$ , и угол между ними будет измеряться половиной дуги  $t_a t_x = 3cz$ .



Фиг. 36.



Фиг. 37.

**Теорема IV.** В четырехугольнике  $ABAB$ , образованном двумя точками Бурместра и двумя соответствующими им центрами кривизны, проведем диагональ  $O\gamma$ . При соблюдении условия (B) сумма углов, на которые надо повернуть прямую  $O\gamma$  вокруг точки  $O$  для того, чтобы совместить ее один раз с лучом  $OA$ , а в другой раз с лучом  $OB$ , равна и противоположна по знаку сумме углов, на которую надо ту же диагональ повернуть вокруг точки  $\gamma$ , чтобы совместить ее один раз с прямой  $\gamma AB$  и в другой раз с прямой  $\gamma AB$ .

Очевидно, что эту теорему, принадлежащую Müller'у<sup>1)</sup>, мы могли бы формулировать еще и следующим образом: биссектрисы углов  $AOB$  и  $A\gamma A$  образуют с диагональю  $O\gamma$  при соблюдении условия (B) равнобедренный треугольник.

Для доказательства теоремы проведем через  $O$  прямые  $O\gamma_a$  и  $O\gamma_x$  (фиг. 37), соответственно параллельные с  $ab \parallel (c, 1/z)$  и  $xy \parallel (z, 1/c)$ . Линия  $O\gamma_a$  пойдет по

1) Z. f. M. u. Ph. B. 48 S. 123.

диагонали  $O\gamma$  четырехугольника  $ABAB$  и сумма углов, на которые надо повернуть  $O\gamma$ , чтобы совместить ее один раз с лучом  $Oa$ , а в другой раз с лучом  $Ob$ , будет измеряться полусуммой дуг

$$(\gamma_a a) + (\gamma_a b) = (\gamma_a O).$$

С другой стороны, углы, на которые надо повернуть прямые  $AB\gamma$  и  $X\gamma\gamma$ , чтобы совместить их с  $O\gamma \parallel ab$ , по теореме III, 5 § 30 будут измеряться половиной дуг  $\left(O, \frac{1}{c}\right)$  и  $(O, z)$ , и их сумма — полусуммой

$$(O, 1/c) + (O, z) = (O\gamma_x).$$

Вследствие симметрии,

$$(\gamma_a O) = -(O\gamma_x),$$

и теорема доказана.

Эта теорема имеет важное значение в теории шарнирного четырехугольника. Сопоставляя ее с теоремой II § 21, мы видим, что две точки Бурместра подвижного звена будут пятого порядка, если четырехугольник приведен в такое положение, что диагональ его  $O\gamma$ , проходящая через мгновенный центр, будет удовлетворять условиям теоремы. В противном случае они будут обе 4 порядка.

**Задача 1.** По данным  $t_0, \tau_0, c, z$ , связанным уравнением  $t_0 = cz\tau_0$ , построить изображения точек Бурместра  $a, b, x, y$  так, чтобы было соблюдено условие (B).

Построим шестиугольник  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  и определим точки  $C_0$  и  $Z_0$ . Положение прямых, которые должны проходить через  $C_0$  и  $Z_0$ , определяется теоремой II. Прямая, проведенная через  $C_0$  и параллельная  $(c, 1/z)$ , будет линией  $ab$ ; прямая, проведенная через  $Z_0$  и параллельная  $(z, 1/c)$ , будет линией  $xy$ .

**Задача 2.** По данным  $t_0, a, b, c$  связанным уравнением  $t_0 = abc$  построить изображения двух точек Бурместра так, чтобы было соблюдено условие B.

Проведем через  $c$  линию, параллельную  $ab$ . Точка пересечения ее с окружностью  $D$  должна быть по теореме II точкой  $1/z$ .

Строим шестиугольник  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  и находим точки  $C_0$  и  $Z_0$ . Линия, проведенная через  $Z_0$ , параллельная  $(z, 1/c)$ , будет линией  $xy$ .

Задачу можно решить, пользуясь теоремой § 38. Построим центр инволюции  $U_0$  и проведем через него прямую, направление которой симметрично с направлением  $ab$  по отношению к оси  $y$ .

**§ 40.** Прямые  $c\tau_0$  и  $xy$  проходят через точку  $Z_0$  (§§ 35 и 37). Поэтому прямая  $xy$  при вращении вокруг точки  $Z_0$  может совпасть с прямой  $c\tau_0$ . Тогда точка  $y$  совпадет с  $\tau_0$ , точка  $x$  — с точкой  $c$ , точка Бурместра  $Y$  — с точкой Валла  $T_0$ , точка  $X$  — с точкой  $C$  и три точки Бурместра  $A, B, X \equiv C$  будут лежать на одной прямой линии. Мы будем иметь, следовательно, случай Чебышева.

Те же рассуждения мы можем применить и к прямым  $ab$  и  $z\tau_0$ , которые проходят через точку  $C_0$ , и мы имеем такую теорему:

**Теорема 1.** Если одна из точек Бурместра совпадает с точкой Валла, то три остальные лежат на одной прямой линии. Случай Чебышева имеет место или при совпадении линии  $ab$  с  $z\tau_0$ , или при совпадении линии  $xy$  с  $c\tau_0$ .

Допустим для определенности, что  $x = c, y = \tau_0$ , т. е. что  $T_0$  есть точка

Чебышева и на прямой лежат три точки Бурместра  $A, B, C$ . Применяя к прямой  $ABC$  теорему III § 30, имеем:

**Теорема II.** В случае Чебышева, прямая, на которой лежат три точки Бурместра  $A, B, C$ , параллельна линии Симпсона треугольника  $abc$  и совпадает с ней, если  $D = D_0$ .

При  $x = c, y = \tau$  уравнение

$$abxy = t_0 \tau_0$$

становится тождественным с уравнением  $t_0 = abc$ ; уравнение же

$$a + b + x + y = -t_0 - \tau_0$$

обращается в

$$a + b + c = -t_0 - 2\tau_0. \quad (1)$$

Чтобы раскрыть геометрическое значение этого равенства, предположим, что  $y = x \operatorname{tg} \theta + M$  есть уравнение прямой, на которой лежат точки Бурместра  $A, B, C$ . Эти точки суть точки пересечения прямой со строфоидой, и по формуле (3) § 30:

$$-p_1 = a + b + c = t_0 - \frac{D_0}{M} t_0,$$

откуда

$$M = \frac{D_0 t_0}{p_1 + t_0}.$$

Но теперь, по уравнению (1)  $p_1 + t_0 = 2(t_0 + \tau_0)$ ; следовательно,

$$M = \frac{D_0 t_0}{2(t_0 + \tau_0)}$$

или по формуле (2) § 31:

$$M = M_0.$$

**Теорема III.** В случае Чебышева прямая, на которой лежат три точки Бурместра, проходит через точку  $M_0$ .

Преобразуем уравнение (1), заменив в нем  $t_0$  через  $abc$ :

$$a + b + c + abc = -2\tau_0. \quad (2)$$

Мы получаем уравнение линейное и симметричное по отношению к  $a$  и  $b$ . Поэтому, если мы будем считать  $c$  и  $\tau_0$  постоянными,  $a$  и  $b$  — переменными, то точки  $a$  и  $b$  образуют на окружности  $D$  инволюцию, и прямая  $ab$  всегда будет проходить через одну и ту же точку — центр инволюции. Чтобы определить его, напишем уравнение прямой  $ab$  [форм. (1) § 26]

$$x(a + b) + y(ab - 1) - Dab = 0.$$

В уравнении два переменных параметра  $a + b, ab$ . Исключая при помощи уравнения (2) параметр  $a + b$ , мы приводим уравнение к виду

$$(1 + ab)(y - cx - D) + 2\left(-y - \tau_0 x + \frac{D}{2}\right) = 0,$$

и видим, что линия  $ab$  при всех значениях параметра  $ab$  всегда проходит через точку пересечения прямых  $y = cx + D$ ,  $y = -\tau_0 x + D/2$ , из которых первая проходит через точку  $D$  и параллельна прямой  $Oc$ , а вторая — через центр окружности  $D$  и параллельна прямой  $(O, -\tau_0)$ .

**Теорема IV.** В случае Чебышева угловые коэффициенты  $a, b, c, \tau_0$  трех точек Бурместра, лежащих на прямой, и точки Чебышева связаны соотношением

$$a + b + c + abc = -2\tau_0. \quad (3)$$

Прямая  $ab$  проходит через точку пересечения прямых

$$y = cx + D, \quad y = -\tau_0 x + \frac{D}{2}. \quad (4)$$

Прямые  $ab$  и  $xy$ , вращаясь вокруг точек  $C_0$  и  $Z_0$ , могут совпасть, первая — с прямой  $(t_0, 1/c)$ , вторая — с прямой  $(t_0, 1/z)$ . В этих двух случаях одна из точек Бурместра удаляется в бесконечность, а соответствующий ей центр кривизны приходит в точку  $T_0$ , центры же кривизны, соответствующие остальным трем точкам Бурместра, располагаются на прямой линии, и мы можем для них доказать теоремы, аналогичные предыдущим (см. ниже § 50, 51).

**Замечание I.** Когда точка  $Y$  совпадает с точкой Wall'a  $T_0$  и обращается в точку Чебышева, то соответствующий ей центр кривизны  $H$  удаляется по строфоиде  $\Sigma$  в бесконечность по направлению ее асимптоты. При этом точка  $X$  совпадает с  $C$ , а соответствующий ей центр кривизны  $\Xi$  приходит в точку, которую в § 36 мы назвали через  $\Gamma$ , и равенство (§ 36, 4)

$$\angle(AB, \Xi H) = \angle(AB, XY)$$

обращается в

$$\angle(AB; \Gamma\tau_0) = \angle(AB, CT_0).$$

Очевидно, что точки  $A, B, C$  имеют совершенно одинаковое отношение к точке  $T_0$ , и потому мы можем написать еще два равенства

$$\begin{aligned} \angle(B\Gamma; A\tau_0) &= \angle(BC, AT_0) \\ \angle(A\Gamma; B\tau_0) &= \angle(CA, BT_0). \end{aligned}$$

Таким образом, углы, которые образует прямая  $ABC$  с прямыми  $AT_0, BT_0$  и  $CT_0$ , равны углам между сторонами треугольника  $A, B, \Gamma$  и направлением асимптоты,  $\tau_0$ , строфоиды  $\Sigma$ . В этих свойствах фигуры, образованной точками  $A, B, C, T_0, A, B, \Gamma$ , нетрудно узнать одну теорему П. Л. Чебышева<sup>1)</sup>.

**Замечание 2.** Проективные пучки  $(C)AB$  и  $(Z)XY$  образуют коническое сечение. Доказанные выше теоремы дают нам возможность определить пять его элементов. На основании теорем I и III, когда прямая  $ZXY$ , вращаясь вокруг точки  $Z$ , совпадет с прямой  $ZCT_0$ , то прямая  $ABC$  пройдет через точку  $M_0$ : прямая  $M_0C$ , поэтому, касается конического сечения в точке  $C$ . На том же основании прямая  $M_0Z$  касается его в точке  $Z$ . Теорема III § 39 дает нам еще одну точку

<sup>1)</sup> П. Л. Чебышев. „О простейших параллелограмах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до величины 4 порядка“. Сочинения, Т. II, стр. 370.

кривой: если мы построим при точках  $C$  и  $Z$  углы  $NCO = OZN = COZ$ , то на основании упомянутой теоремы при соблюдении условия (B) прямая  $CAB$  совпадет с  $CN$ , а прямая  $ZXY$  — с  $ZN$ , и точка их пересечения  $N$  будет принадлежать коническому сечению.

Таким образом, геометрическое место точек пересечения соответствующих прямых пучков  $(C)AB$  и  $(Z)XY$  есть коническое сечение, которое касается прямых  $M_0C$  и  $M_0Z$  в точках  $C$  и  $Z$  и проходит через точку  $N$ . Для него прямая  $CZT_0$  служит полярной точки  $M_0$ .

**Задача I.** Даны  $t_0, \tau_0, c, z$ , связанные между собой равенством  $t_0 = c\tau_0$ . Требуется найти точки  $a, b$  так, чтобы  $a, b, c, \tau_0$  были изображениями трех точек Бурместра  $A, B, C$ , лежащих на одной прямой, и точки Чебышева  $T_0$ .

Задача может быть решена различным образом.

1. По данным  $t_0, \tau_0, c, z$  построим шестиугольник  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$ , а затем, предполагая, что  $xy$  совпадает с  $c\tau_0$  находим  $ab$ , как сказано в задаче § 34 или в задаче 1 § 37.

2. Предположим, что задача решена и нам известно положение точек  $a, b$ . По теореме § 39 точки  $x$  и  $y$  образуют инволюцию, центром которой служит точка  $U_0$ . Точки  $c$  и  $\tau_0$  должны быть двумя соответствующими точками этой инволюции, и прямая  $c\tau_0$  должна пройти через точку  $U_0$ . Через ту же точку проходит и прямая  $(D, -c)$ , и потому по данным  $c$  и  $\tau_0$  мы можем определить центр инволюции  $U_0$ . Прямая  $U_0O$  должна пересечь окружность  $D$  в точке  $-\gamma = -\text{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)$  (см. § 38). Точка  $-\gamma$  определяет направление прямой  $ab$ .

3. Можно определить точки  $a$  и  $b$ , воспользовавшись уравнениями:

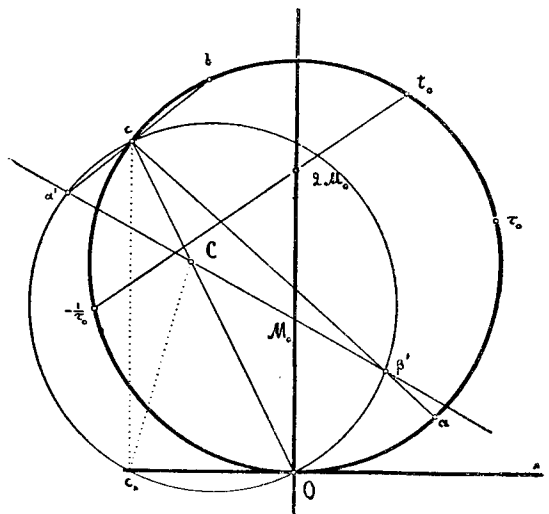
$$ab = \frac{t_0}{c}$$

$$a + b = -c - t_0 - 2\tau_0.$$

По правилам, данным в § 26, мы построим точки  $t_0/c, -c - t_0 - 2\tau_0$ , а затем и точки  $a$  и  $b$ .

4. Зная  $t_0, c$ , определяем точку  $C_0$ , в которой прямая  $(t_0, 1/c)$  пересекает ось  $y$ ; прямая  $ab$  должна пройти через точку  $C_0$ . Другую точку прямой  $ab$  мы найдем, пользуясь теоремой IV. Проводим через точку  $D$  прямую  $DK$ , параллельную прямой  $Os$ , и через центр  $O'$  окружности  $D$  — прямую  $O'K$  параллельную прямой  $(O, -\tau_0)$ . Через точку пересечения этих прямых должна пройти прямая  $ab$ . Поэтому линия  $KC_0$  пересечет окружность в точках  $a$  и  $b$ .

5. Задача может быть решена при помощи теорем II и III. Положение точек  $\tau_0, a, b, c$  на окружности  $D$  не зависит от того, каков будет диаметр основной окружности  $D_0$ . Мы можем, поэтому, решая задачу, временно принять, что  $D_0 = D$  (фиг. 38). В таком случае прямая  $(t_0, -1/\tau_0)$  пересечет ось  $y$  в точке  $2M_0$  (теорема I § 31), а



Фиг. 38.



линия Симпсона треугольника  $abc$  пройдет через точку  $M_0$ . Проведем через  $c$  линию параллельную оси  $y$  до пересечения с осью  $x$  в точке  $c_x$  и через  $c_x$  — линию, параллельную прямой  $Ot_0$ ; пусть  $C$  — точка пересечения ее с лучом  $Oc$  (см. § 3 задача D,3). Линия Симпсона должна пройти через точку  $C$ . Таким образом,  $M_0C$  будет линией Симпсона для искомого треугольника  $abc$ . Чтобы определить точки  $a$  и  $b$ , опишем на  $Oc$  как на диаметре окружность  $Oc$ , которая пересечется с прямой  $M_0C$  в двух точках  $\alpha'$  и  $\beta'$ . Прямая  $c\alpha'$  встретит окружность  $D$  в точке  $b$ , прямая  $c\beta'$  — в точке  $a$ .

**Задача 2.** Даны  $t_0; a, b, c$ , связанные между собой равенством  $t_0 = abc$ . Требуется определить  $\tau_0$  так, чтобы  $a, b, c$  были изображениями трех точек Бурместра и  $\tau_0$  — изображением точки Чебышева.

Задача может быть решена различным образом.

1. По данным  $t_0, a, b, c$  построим центр инволюции  $U_0$  (§ 38). Каждая прямая, проходящая через  $U_0$ , пересечет окружность в двух точках,  $x, y$ , которые могут быть приняты за изображение двух точек Бурместра  $X, Y$ . Когда  $x$  совпадает с  $c$ , то  $y$  должен совпасть с  $\tau_0$ ; прямая  $cU_0$  встретит окружность в точке  $\tau_0$ .

2. Можно воспользоваться равенством (1) и по правилам § 26 построить  $\tau_0$ .

3. Воспользуемся теоремой IV. Проведем через точку  $D$  прямую, параллельную  $Oc'$  и обозначим через  $K$  точку пересечения ее с прямой  $ab$ . На основании теоремы IV прямая  $O'K$ , соединяющая центр  $O'$  окружности  $D$  с точкой  $K$ , будет иметь угловой коэффициент —  $\tau_0$ . Поэтому, проведя через начало прямую, параллельную  $O'K$ , получаем на окружности точку —  $\tau_0$ ; по ней построим точку  $\tau_0$ .

4. Примем окружность  $D$  за основную окружность строфоиды  $S$  и построим линию Симпсона для треугольника  $abc$ . По теореме III она пройдет через точку  $M_0$ . Зная точку  $M_0$ , построим точку  $2M_0$  и соединим ее с  $t_0$  прямой линией. Эта последняя по теореме I § 31 пересечет окружность в точке  $-1/\tau_0$ .

**§ 41.** Перейдем теперь к рассмотрению особенностей в расположении точек Бурместра, с которыми мы встречаемся, когда соблюдаются одновременно условия (A) и (B). Первое условие характеризует случай Чебышева; при соблюдении второго (теорема II § 21) все точки Бурместра будут пятого порядка, если две из них — 5-го порядка. Поэтому случай, когда имеют место оба условия (A) и (B), мы будем называть случаем Чебышева 5 порядка.

Если четырехугольник  $ABAB$  будет шарнирным четырехугольником с неподвижным звеном  $AB$ , то при условии (B) точка Чебышева будет пятого порядка и на большом протяжении своей траектории с большой степенью точности будет осуществлять прямолинейное движение.

В случае Чебышева мы имеем  $x = c, y = \tau_0$ ,

$$a + b + c + abc = -2\tau_0, \tag{1}$$

условие же (B) при  $x = c, y = \tau_0$  принимает вид:

$$(1 - ab)(c + \tau_0) + (1 - c\tau_0)(a + b) = 0. \tag{2}$$

К этим уравнениям мы присоединим еще

$$t_0 = abc \tag{3}$$

и

$$t_0 = c\tau_0. \tag{4}$$

Таким образом, при одновременном существовании условий (А) и (В) угловые коэффициенты точек Бурместра  $a, b, c$ , точки Чебышева  $\tau_0$  и величины  $t_0$  и  $z$  связаны между собой четырьмя уравнениями. Поэтому между каждым тремя из них будет существовать одно соотношение, и положение всех шести точек  $a, b, c, \tau_0, t_0, z$  будет определяться двумя из них.

Соотношение между  $c, z, \tau_0$  проще всего получается, если мы сопоставим теорему I § 40 с теоремой II § 39. На основании первой при условии (А) прямая  $xu$  совпадает с  $c\tau_0$ , на основании второй при условии (В) прямая  $xu$  параллельна прямой  $(z, 1/c)$ , а потому одновременное существование условий (А) и (В) возможно только, когда прямая  $c\tau_0$  параллельна прямой  $(z, 1/c)$ , т. е.

$$\frac{c + \tau_0}{1 - c\tau_0} = \frac{z + 1/c}{1 - z/c} = \frac{1 + cz}{c - z}. \quad (5)$$

Это равенство мы могли бы получить, исключая  $a, b, t_0$  из уравнений (1), (2), (3) и (4) или заменяя в уравнении (5) § 39  $x, y$  через  $c$  и  $\tau_0$ .

Таким образом, хотя ни условие (А), ни условие (В), взятые в отдельности, не налагают никаких ограничений на шестиугольник  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$ , однако при одновременном их существовании этот шестиугольник не может быть произвольным: диагональ его  $(z, 1/c)$  должна быть параллельна стороне  $c\tau_0$  (фиг. 39).

**Теорема I.** Одновременное существование условий (А) и (В) возможно только в том случае, когда диагональ шестиугольника  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$ , соединяющая противоположные вершины  $(z, 1/c)$ , параллельна стороне  $c\tau_0$ .

Можно равенству (5) дать другое толкование. Перепишем его таким образом:

$$c^2 - 2cz - 1 + \tau_0(c^2z + 2c - z) = 0 \quad (6)$$

или

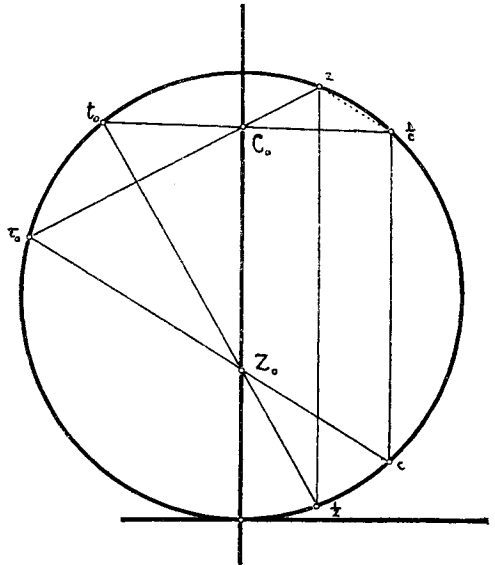
$$\frac{1}{2} \left( c - \frac{1}{c} \right) = \frac{z - \tau_0}{1 + z\tau_0}. \quad (7)$$

По формуле (3) § 26  $\frac{1}{2}(c - 1/c)$  равняется угловому коэффициенту прямой, соединяющей точки  $c, -1/c$ , т. е. диаметра, проведенного через точку  $c$ , а  $\frac{z - \tau_0}{1 + z\tau_0}$  — угловому коэффициенту прямой  $(z, -\tau_0)$ .

**Теорема II.** Одновременное существование условий (А) и (В) возможно только тогда, когда диаметр, проведенный через точку  $c$ , параллелен прямой  $(z, -\tau_0)$ .

Допустим, что шестиугольник обладает указанным в теореме I свойством и мы имеем равенство (5). Если  $xu$  совпадает с  $c\tau_0$ , то мы имеем случай Чебышева, равенство (1), и по свойству шестиугольника линия  $xu$  будет параллельна прямой  $(z, 1/c)$ . Но мы видели (§ 37, задача 2, 3), что при  $xu \parallel (z, 1/c)$  мы имеем  $ab \parallel (c, 1/z)$ , и следовательно,

$$\frac{a + b}{1 - ab} = \frac{1 + cz}{z - c}. \quad (8)$$



Фиг. 39.

Сопоставляя (5) и (8), мы получаем уравнение (2), т. е. условие (B). Обратное, если имеет место уравнение (2), то из него и уравнения (5) следует (8), показывающее нам, что  $ab \parallel (c, 1/z)$ . Но в таком случае по § 37 (задача 2, 3)  $xy \parallel (z, 1/c) \parallel (c, \tau_0)$ , а следовательно прямые  $xy$  и  $c\tau_0$ , как имеющие общую точку  $Z_0$ , совпадают, и  $x=c, y=\tau_0$ ; мы имеем случай Чебышева и равенство (1).

**Теорема III.** Когда шестиугольник обладает указанным в теоремах I или II свойством, то условие (A) влечет за собой условие (B) и обратно. При соблюдении этих условий линия  $ab$  параллельна прямой  $(c, 1/z)$ , а линия  $xy$  совпадает с  $c\tau_0$ .

Допустим, что шестиугольник обладает указанным в теореме I или II свойством, и посмотрим как отразится это свойство на положении точек  $C$  и  $Z$ . Будем вращать прямые  $ab$  и  $xy$  вокруг точек  $C_0$  и  $Z_0$ , а прямые  $ABC$  и  $XYZ$  — вокруг точек  $C$  и  $Z$ . Мы знаем, что когда прямая  $xy$  совпадает с  $c\tau_0$  и, следовательно, прямая  $XYZ$  — с  $CT_0Z$ , то будет соблюдено условие (A). Тогда по теореме III будет существовать и условие (B), и по теореме III § 39.

$$\angle ACO = \angle COZ = \angle OZX.$$

Но прямая  $XYZ$  (фиг. 40) совпадает теперь с прямой  $CT_0Z$ , а потому предыдущие равенства обращаются в

$$\angle ACO = \angle COZ = \angle OZC.$$

Таким образом в треугольнике  $OZC$  углы при основании равны, и мы имеем теорему:

**Теорема IV.** Если шестиугольник обладает указанным в теореме I или II свойством, то треугольник  $OCZ$  будет равнобедренным с вершиной в точке  $C$  и с основанием  $OZ$ .

Угол  $\angle OCT_0$ , как внешний угол треугольника  $OCZ$ , равен

$$\angle COZ + \angle OZC = 2 \angle ACO$$

и потому

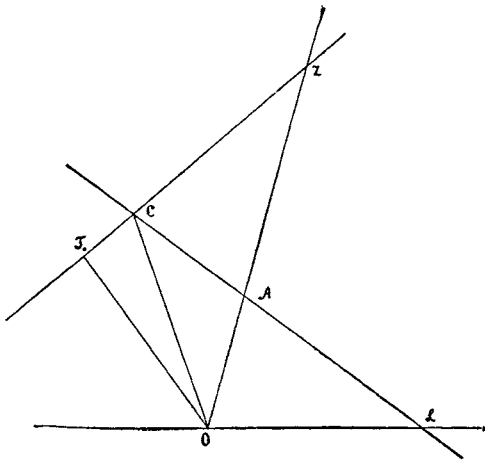
$$\angle ACT_0 = \angle ACO + \angle OCT_0 = 3 \angle ACO.$$

Это равенство можно непосредственно получить из (7) § 39, ибо в случае Чебышева прямая  $XYZ$  совпадает с  $CT_0Z$  и пересекается с прямой  $ABC$  в точке  $C$ , и мы имеем:

$$\angle ACT_0 = \angle (AB, XY) = 3 \angle COZ = 3 \angle ACO.$$

Точки  $A, B, C$  играют совершенно одинаковую роль, и мы приходим, таким образом, к теореме Чебышева <sup>1)</sup>:

<sup>1)</sup> „О параллелограммах, состоящих из трех каких-либо элементов“. Сочинения. Т. II, стр. 303.



Фиг. 40.

**Теорема V.** В случае Чебышева пятого порядка между углами, образованными прямыми, соединяющими точки Бурместра  $A, B, C$ , лежащие на одной прямой, с точкой Чебышева  $T_0$  и с точкой  $O$  имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \angle OCT_0 &= 2 \angle BCO, & \angle OAT_0 &= 2 \angle CAO, & \angle OBT_0 &= 2 \angle ABO, \\ \angle BCT_0 &= 3 \angle BCO, & \angle CAT_0 &= 3 \angle CAO, & \angle OCT_0 &= 3 \angle ABO. \end{aligned}$$

**Замечание.** Точки  $a, b, c, C_0$  играют такую же роль как и точки  $x, y, z, Z_0$ . Поэтому в теоремах I, II, III, IV мы можем, не нарушая их правильности, заменить буквы  $a, b, c, C_0, A, B, C$  буквами  $x, y, z, Z_0, X, Y, Z$  и обратно.

§ 42. В уравнения (1) и (2) предыдущего параграфа входят только угловые коэффициенты  $a, b, c, \tau_0$ .

**Теорема I.** В случае Чебышева 5-го порядка угловые коэффициенты точек Бурместра,  $a, b, c$  и точки Чебышева  $\tau_0$  связаны между собой двумя соотношениями:

$$a + b + c + abc = -2\tau_0, \quad (1)$$

$$(1 - ab)(c + \tau_0) + (1 - c\tau_0)(c + \tau_0) = 0. \quad (2)$$

Геометрическое значение первого было указано в теореме IV § 40 и второго — в теореме I § 39. Равенство (2) можно истолковать еще иначе.

**Теорема II.** Если угловые коэффициенты четырех точек  $a, b, c, \tau_0$  связаны между собой соотношением

$$(1 - ab)(c + \tau_0) + (1 - c\tau_0)(a + b) = 0, \quad (2)$$

то прямая  $ab$  перпендикулярна к прямой  $(1/\tau_0, -c)$

В самом деле, по формуле (3) § 26 угловые коэффициенты прямых  $ab$  и  $(1/\tau_0, -c)$  соответственно равны

$$\frac{a + b}{1 - ab}, \quad \frac{1 - c\tau_0}{c + \tau_0},$$

и уравнение (2), будучи переписано таким образом:

$$\frac{a + b}{1 - ab} \cdot \frac{1 - c\tau_0}{c + \tau_0} = -1,$$

показывает нам, что произведение их равно  $-1$ , и прямые  $ab$  и  $(1/\tau_0, -c)$  взаимно перпендикулярны.

Исключая из уравнений (1) и (2) величину  $c$ , мы получим

$$2\tau_0^2(a + b) + \tau_0[(a + b) + (1 - ab)] [(a + b) - (1 - ab)] + 2ab(a + b) = 0,$$

или, обозначая угловой коэффициент прямой  $ab$  через  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{a + b}{1 - ab}, \quad (3)$$

и подставляя вместо  $a + b = \gamma(1 - ab)$ ,

$$\tau_0^2 + \frac{1}{2} \tau_0 \left( \frac{1}{\gamma} - \gamma \right) (1 - ab) + ab = 0. \quad (4)$$

Рассматривая это уравнение как уравнение определяющее  $\tau_0$  по данным  $a$  и  $b$ , мы видим, что произведение его корней должно быть равно  $ab$ , и, следовательно, прямая, соединяющая точку  $\tau_0$ , изображающую один корень, с точкой, изображающей другой корень, должна пересечься с  $ab$  на оси  $y$  в точке  $C_0$ . Но с другой стороны,  $z\tau_0 = ab$  (4) § 35, и через точку  $C_0$  проходит и прямая  $\tau_0 z$ ; следовательно, эта последняя совпадает с первой, и точка  $z$  должна совпасть с одной из точек, изображающих корень уравнения: если один корень мы примем за  $\tau_0$ , то другой корень будет равен  $z$ .

В справедливости этого заключения мы можем убедиться, составляя уравнение, связывающее  $a$ ,  $b$  и  $z$ . Действительно, если из уравнения (4) мы исключим  $\tau_0$ , полагая  $\tau_0 = ab/z$ , то для определения  $z$  мы получим уравнение:

$$z^2 + \frac{1}{2}z \left( \frac{1}{\gamma} - \gamma \right) (1 - ab) + ab = 0 \quad (5)$$

тождественное с (4). Тождество уравнений (4) и (5) приводит к мысли составить уравнение, в которое входили бы оба корня  $z$  и  $\tau_0$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\gamma} - \gamma \right) = \frac{z + \tau_0}{1 - z\tau_0}. \quad (6)$$

Его мы получаем, заменяя в (4) или (5)  $ab$  через  $z\tau_0$ .

По формуле (3) § 26 величины  $\frac{1}{2}(1/\gamma - \gamma)$  и  $(z + \tau_0)/(1 - z\tau_0)$  равны соответственно угловым коэффициентам диаметра  $(1/\gamma, -\gamma)$  и прямой  $z\tau_0$ , и равенство (6) дает нам теорему:

**Теорема III.** В случае Чебышева пятого порядка прямая  $z\tau_0$  параллельна диаметру, проходящему через точку  $1/\gamma$ .

Если из уравнений (1) и (2) мы исключим  $\tau_0$ , то получим уравнение:

$$a + b + c + (bc + ca + ab)(a + b + c + abc) - 3abc = 0, \quad (7)$$

о котором речь будет идти в следующем параграфе.

§ 43. Заменяя в уравнении (6) предыдущего § один раз  $z$  через  $t_0/c\tau_0$ , а в другой раз  $\tau_0$  через  $t_0/cz$ , мы получаем два уравнения:

$$c^3 + (t_0 + 2\tau_0)c^2 - (1 + 2t_0/\tau_0)c - t_0 = 0, \quad (1)$$

$$c^3 + (t_0 - 2z)c^2 - (1 - 2t_0/z_0)c - t_0 = 0. \quad (2)$$

Первому уравнению удовлетворяет не только угловой коэффициент  $c$  точки  $C$ , но и угловые коэффициенты  $a$  и  $b$  двух других точек Бурместра  $A$  и  $B$ , лежащих на одной прямой с  $C$ . Чтобы убедиться в этом, вычислим простые симметрические функции от  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Раскрывая в уравнении (2) предыдущего параграфа скобки и подставляя в него вместо  $abc$  и  $a + b + c$  их выражения (1) § 42 и (3) § 41, мы получаем:

$$a + b + c + \tau_0 - (bc + ca + ab)\tau_0 - abc = 0, \\ 2t_0 + \tau_0 + (bc + ca + ab)\tau_0 = 0.$$

Таким образом,

$$-p_1 = a + b + c = -t_0 - 2\tau_0, \quad (3)$$

$$p_2 = bc + ca + ab = -1 - 2t_0/\tau_0, \quad (4)$$

$$-p_3 = abc = t_0, \quad (5)$$

и мы имеем теорему:

**Теорема I.** В случае Чебышева пятого порядка угловые коэффициенты точек Бурместра суть корни кубического уравнения:

$$t^3 + (t_0 + 2\tau_0)t^2 - (1 + 2t_0/\tau_0)t - t_0 = 0. \quad (6)$$

Пусть  $y = x \operatorname{tg} \theta + M$  — уравнение прямой, на которой лежат точки Бурместра  $A, B, C$ . Так как они суть точки пересечения прямой со строфоидой  $S$ , то  $\operatorname{tg} \theta$  и  $M$  связаны с угловыми коэффициентами  $a, b, c$  уравнениями (3) и (4) § 30. При тех значениях (3) и (4), которые теперь имеют  $p_1$  и  $p_2$ , уравнения (3) и (4) принимают вид:

$$-t_0 - 2\tau_0 = t_0 - \frac{D_0}{M} t_0$$

$$-1 - 2t_0/\tau_0 = 1 - \frac{D_0}{M} \operatorname{tg} \theta.$$

Из них мы имеем:

$$M = \frac{D_0 t_0}{2(t_0 + \tau_0)}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{2M(t_0 + \tau_0)}{D_0 t_0 \tau_0},$$

и затем:

$$M = M_0, \quad \operatorname{tg} \theta = 1/\tau_0,$$

так что уравнение прямой  $ABC$  будет:

$$y = 1/\tau_0 x + M_0. \quad (7)$$

Пользуясь теми же формулами (3), (4), (5) и уравнением (2) § 29, составим уравнение линии Симпсона треугольника  $abc$ :

$$y = 1/\tau_0 x + M_0 \frac{D}{D_0}. \quad (8)$$

Полученные два уравнения (7) и (8) подтверждают справедливость теорем II и III § 40 и кроме того приводят к такому результату:

**Теорема II.** В случае Чебышева пятого порядка прямая

$$y = 1/\tau_0 x + M_0,$$

на которой лежат три точки Бурместра, и параллельная с ней линия Симпсона треугольника  $abc$  имеют угловой коэффициент  $1/\tau_0$ .

Вычисляя по формулам (3), (4), (5) выражение  $\exists p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1$ , мы снова получаем равенство (8) предыдущего параграфа:

$$\exists p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1 = 0,$$

и на основании теоремы II § 29 приходим к теореме:

**Теорема III.** В случае Чебышева пятого порядка точка пересечения высот треугольника  $abc$  лежит на оси  $y$  и ее ордината вдвое больше начальной ординаты линии Симпсона.

§ 44. Обозначим через  $\varepsilon$  угол, образованный асимптотой строфоиды  $\Sigma$  с осью  $x$ , т. е. положим

$$\tau_0 = \operatorname{tg} \varepsilon$$

и введем этот угол в уравнение (6) предыдущего параграфа. Отделив в нем члены с  $t_0$ :

$$t(t^2 + 2t\tau_0 - 1) + t_0(t^2 - 2t/\tau_0 - 1) = 0$$

и замечая, что  $t = \operatorname{tg} \varphi$ , преобразуем суммы:

$$\begin{aligned} t^2 + 2t\tau_0 - 1 &= -\frac{\cos(2\varphi + \varepsilon)}{\cos \varphi \cos \varepsilon} \\ t^2 - 2t/\tau_0 - 1 &= -\frac{\sin(2\varphi + \varepsilon)}{\cos \varphi \sin \varepsilon}, \end{aligned}$$

после чего уравнение (6) § 43 примет вид:

$$t_0 = -\tau_0 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg}(2\varphi + \varepsilon). \quad (1)$$

Покажем, что при помощи этого уравнения легко получить уравнение (5) § 9 и формулы, принадлежащие П. Л. Чебышеву.

Действительно, вычислив

$$t_0 + \tau_0 = \tau_0 \frac{\sin(\varphi + \varepsilon)}{\cos \varphi \sin(2\varphi + \varepsilon)}, \quad (2)$$

$$t_0 - \tau_0 = -\tau_0 \frac{\sin(3\varphi + \varepsilon)}{\cos \varphi \sin(2\varphi + \varepsilon)}, \quad (3)$$

мы по формуле (2) § 31 получаем уравнение

$$2M_0 = -D_0 \frac{\sin \varphi \cos(2\varphi + \varepsilon)}{\sin(\varphi + \varepsilon)}, \quad (4)$$

которое тождественно с уравнением (5) § 9, ибо угловой коэффициент прямой  $ABC$  по теореме II § 43 равняется  $1/\tau_0 = \operatorname{ctg} \varepsilon$  и, следовательно,  $\varepsilon = 90^\circ - \theta$ .

Чтобы получить формулы Чебышева, вычислим радиус кривизны  $R$ , соответствующий какой-нибудь точке  $C$  строфоиды  $S$ . Пусть  $\Gamma$  есть центр кривизны, соответствующий точке  $C$  и находящийся на строфоиде  $\Sigma$ ,  $\varphi$  — полярный угол точки  $C$ ,  $x$  — ее абсцисса,  $\xi$ ,  $\eta$  — координаты точки  $c$ ,

$$\begin{aligned} r &= OC, \quad \varrho = O\Gamma, \quad R = \Gamma C = r - \varrho, \quad r_0 = Oc = D \sin \varphi, \\ x &= r \cos \varphi, \quad \xi = r_0 \cos \varphi, \quad \eta = \xi \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

По формуле (1) § 30

$$r \cos \varphi = -\frac{H_0 \xi}{D(t_0 \xi - \eta)} r_0 \cos \varphi \quad (5)$$

или

$$r = -\frac{H_0}{t_0 - t} \sin \varphi.$$

Также находим:

$$\varrho = -\frac{H_0}{\tau_0 - t} \sin \varphi \quad (6)$$

и затем

$$R = r - \varrho = \frac{H_0(t_0 - \tau_0)}{(t_0 - t)(\tau_0 - t)} \sin \varphi. \quad (7)$$

Предположим теперь, что  $C$  есть точка Бурместра, и определим из треугольника  $OCT_0$  (фиг. 40) расстояние  $m = CT_0$  этой точки до точки Чебышева  $T_0$ . Из треугольника  $\hat{O}CL$ , образованного прямой  $ABC$  лучом  $OC$  и осью  $x$ , имеем:

$$LC\hat{O} = LOC + CLO.$$

Но по теореме II § 43 угловой коэффициент прямой  $ABC$  равен  $1/\tau_0 = \text{ctg } \varepsilon$ , а потому

$$\begin{aligned} OLC &= 90^\circ - \varepsilon, & CLO &= 90^\circ + \varepsilon, \\ LCO &= \varphi + \varepsilon + 90^\circ, \end{aligned} \quad (8)$$

и, по теореме V § 41:

$$OCT_0 = 2LCO = 2(\varphi + \varepsilon) + 180^\circ.$$

Так как, далее,

$$COT_0 = \varepsilon - \varphi,$$

то

$$OT_0C = T_0OC + OCT_0 = \varphi - \varepsilon + 2(\varphi + \varepsilon) + 180^\circ = 3\varphi + \varepsilon,$$

и из треугольника  $OCT_0$  мы получаем:

$$\frac{m}{r} = \frac{\sin(\varepsilon - \varphi)}{\sin(3\varphi + \varepsilon)},$$

затем

$$\frac{m}{R} = \frac{\sin(\varepsilon - \varphi)}{\sin(3\varphi + \varepsilon)} \cdot \frac{r}{r - \varrho},$$

и при помощи формул (5) и (7)

$$\begin{aligned} \frac{m}{R} &= \frac{\tau_0 - t}{\tau_0 - t_0} \cdot \frac{\sin(\varepsilon - \varphi)}{\sin(3\varphi + \varepsilon)}, \\ \frac{R}{m} &= + \frac{\sin \varepsilon}{\sin(2\varphi + \varepsilon)} \cdot \frac{\sin^2(3\varphi + \varepsilon)}{\sin^2(\varepsilon - \varphi)}. \end{aligned}$$

Чтобы отождествить эту формулу с формулой Чебышева <sup>1)</sup>

$$\frac{r}{m} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left( 2\varphi + \frac{\gamma}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2(3\varphi + \gamma)}{\cos^2(\varphi + \gamma)},$$

<sup>1)</sup> „О параллелограмах, состоящих из трех каких-либо элементов“. Сочинения. Т. II, стр. 303.



надо принять во внимание, что П. Л. Чебышев обозначает угол  $LCO$  (8) буквой  $\varphi$ , а угол  $180^\circ - 2\varepsilon$ , который образует касательная, соответствующая точке  $T_0$  с прямой  $ABC$ , — буквой  $\gamma$ .

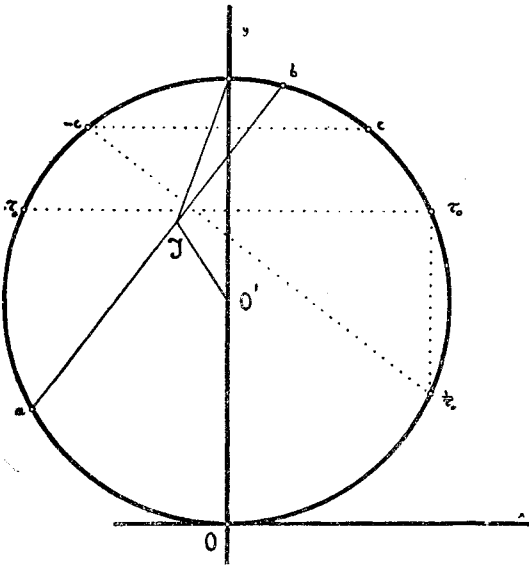
**§ 45.** При одновременном соблюдении условий (А) и (В) между 6 величинами  $a, b, c, t_0, \tau_0, z$  мы имеем 4 уравнения (1), (2), (3), (4) § 41, и потому, как уже было упомянуто, положение всех шести точек будет определяться двумя из них. Вследствие того, что  $a$  и  $b$  играют совершенно одинаковую роль не только по отношению к  $t_0, \tau_0$  и  $c$ , но и по отношению к  $z$ , возможны 8 задач.

По данным  $(c, \tau_0), (c, z), (z, \tau_0), (c, t_0), (a, b), (t_0, \tau_0), (t_0, z), (a, z)$  построить остальные точки.

Первые две задачи приводятся к уравнению 1 степени, задачи 3, 4 и 5 — к уравнению квадратному и задачи 6 и 7 — к кубическому. Что же касается задачи последней, то она приводится к уравнению квадратному, но мы ею заниматься не будем.

**Задача I.** Даны  $c$  и  $\tau_0$ , т. е. дано изображение одной из точек Бурместра и точки Чебышева.

Задача может быть решена различным образом.



Фиг. 41.

1. По данным  $c$  и  $\tau_0$  строим три вершины  $c, 1/c, \tau_0$  шестиугольника. Проведем через точку  $1/c$  линию, параллельную  $c\tau_0$ , на основании теоремы I § 33 получим точку  $z$ , а затем и весь шестиугольник  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$ . Линия, проведенная через  $C_0$  параллельно прямой  $(c, 1/z)$ , определит точки  $a$  и  $b$  (теорема III § 41).

2. Мы можем воспользоваться теоремами I и II § 42. По  $c$  и  $\tau_0$  строим точку  $J$  пересечения прямых (фиг. 41).

$$y = cx + D, \quad y = -\tau_0 x + \frac{D}{2}.$$

Прямая  $ab$  должна пройти через точку  $J$  и быть перпендикулярной к прямой  $(1/\tau_0, -c)$ .

2. Для построения точки  $z$  можно воспользоваться теоремой II § 41. Через точку  $\tau_0$  проведем прямую параллельную диаметру  $(c, -1/c)$ . Мы получим точку  $-z$ , по ней построим  $z$  и затем поступаем как в предыдущем решении.

**Задача 2.** Даны  $c$  и  $z$ , т. е. изображение точки Бурместра, и точка  $z$ .

1. По данным  $c$  и  $z$  строим четыре вершины  $z, c, 1/z, 1/c$  шестиугольника. Через  $c$  проводим прямую, параллельную  $(z, 1/c)$ ; точка ее пересечения с окружностью по теореме I § 41 будет точкой  $\tau_0$ . Зная  $\tau_0$ , строим весь шестиугольник и через точку  $C_0$  проводим прямую  $ab$ , параллельную прямой  $(c, 1/z)$ .

2. Через  $z$  проводим прямую, параллельную диаметру  $(c, -1/c)$ ; получим точку  $-\tau_0$  и затем точку  $\tau_0$ . Задача приводится к задаче 1.

**Задача 3.** Даны  $\tau_0$  и  $z$ , т. е. изображение точки Чебышева, и точка  $z$ .

1. Проведем через центр диаметр, параллельный прямой  $(z, -\tau_0)$ . Он пере-

сечет окружность в двух точках  $c_1$  и  $c_2$ . Каждую из них мы можем принять за точку  $c$ . Задача имеет два решения. Когда известна точка  $c$ , задача приводится к задаче 1.

2. Точки  $a$  и  $b$  могут быть найдены при помощи теоремы III § 42. Проведем через центр диаметр параллельный прямой  $z\tau_0$ . Он пересечет окружность в двух точках  $-\gamma_1, -\gamma_2$ . Через точку  $C_0$ , в которой прямая  $z\tau_0$  пересекается с осью  $y$ , проведем две прямые  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$ , соответственно параллельные  $O\gamma_1$  и  $O\gamma_2$ . Каждую из них мы можем принять за линию  $ab$ . Вопрос о том, которая из прямых  $a_1b_1, a_2b_2$  будет соответствовать точке  $c_1$  и которая — точке  $c_2$ , решается или на основании теоремы II § 42 или проще на основании теоремы III § 28.

Пусть линия  $a_1b_1$  соответствует точке  $c_1$  и линия  $a_2b_2$  — точке  $c_2$ . Мы получаем, таким образом, два решения:  $a_1b_1c_1$  и  $a_2b_2c_2$ , причем из построения видно, что  $a_1b_1$  перпендикулярна  $a_2b_2$  и точки  $c_1$  и  $c_2$  лежат в концах диаметра.

**Задача 4.** Даны  $c$  и  $t_0$ , т. е. изображение одной из точек Бурместра и форма строфоиды  $S$ .

1. Первое решение основано на уравнениях  $z(-\tau_0) = t_0(-1/c)$  и (7) § 41. На основании первого прямая  $(z, -\tau_0)$  должна пройти через точку  $\Gamma_0$ , в которой прямая  $(t_0, -1/c)$  пересекает ось  $y$ . На основании второго прямая  $(z, -\tau_0)$  должна быть параллельна диаметру  $(c, -1/c)$ . Этими условиями определяется прямая  $(z, -\tau_0)$ . Каждую из точек ее пересечения с окружностью  $D$  можно принять за точку  $z$ , тогда другая будет точкой  $-\tau_0$ . Когда известно  $z$ , задача приводится к задаче 1. Задача имеет два решения.

2. По данным  $t_0$  и  $c$  определяем точку  $C_0$  пересечения прямой  $(t_0, 1/c)$  с осью  $y$ . Прямая  $ab$  должна пройти через точку  $C_0$ , и задача таким образом приводится к задаче 2 § 29.

Мы получим два треугольника  $a_1b_1c$  и  $a_2b_2c$  и две соответствующие им точки  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Чтобы закончить задачу и найти изображение  $\tau_0$  точки Чебышева, можно поступать различным образом.

Обозначим через  $abc$  какой-нибудь из треугольников  $a_1b_1c$  и  $a_2b_2c$  и через  $\gamma$  — соответствующий угловой коэффициент прямой  $ab$ .

а. Для определения  $\tau_0$  мы можем воспользоваться теоремой II § 43. Строим линию Симпсона для треугольника  $abc$ ; так как ее угловой коэффициент равен  $1/\tau_0$ , то прямая, проведенная через начало параллельно ей, пересечет окружность в точке  $1/\tau_0$ . По ней найдем и точку  $\tau_0$ .

б. Для определения точки  $\tau_0$  нам надо знать только направление линии Симпсона, и потому мы можем воспользоваться построением, данным в § 3, 4. Проведем через точку  $D$  прямую, параллельную стороне  $ab$ , до пересечения с окружностью в точке  $c'$ . Так как  $ab$  сама параллельна прямой  $O\gamma$ , то очевидно, что точка  $c'$  совпадет с точкой  $-1/\gamma$ , диаметрально противоположной  $\gamma$ . Прямая  $(c, -1/\gamma)$  будет поэтому параллельна линии Симпсона, и прямая, параллельная с ней и проведенная через начало, определит точку  $1/\tau_0$ .

с. Пользуясь тем же построением § 3, 4, мы можем построить точку  $1/\tau_0$  еще иначе. Через точку  $1/c$  проводим прямую, параллельную  $ab$  или  $O\gamma$ ; точка пересечения ее с окружностью и будет точкой  $1/\tau_0$ .

д. Точку  $\tau_0$  можно построить еще при помощи теоремы III § 41. На основании этой теоремы, если через точку  $c$  мы проведем прямую, параллельную  $ab$  или  $O\gamma$ , то точка ее пересечения с окружностью будет точкой  $1/z$ . Зная  $1/z$ , построим  $z$ ; прямая, проведенная через  $c$  параллельно прямой  $(z, 1/c)$ , пересечет окружность в точке  $\tau_0$ .

Задача 4 имеет два решения, ибо для треугольника  $abc$  мы имеем два положения.

**Задача 5.** Даны точки  $a$  и  $b$ , т. е. изображения двух точек Бурместра, лежащих на прямой линии.

Пользуясь задачей 1 § 29, построим точку  $c$ . Зная изображение трех точек Бурместра  $a, b, c$ , построим  $\tau_0$ , как было указано в задаче 4.

Чтобы построить  $t_0$ , означим через  $C_0$  точку пересечения прямой  $ab$  с осью  $y$  и проведем  $(C_0, 1/c)$ . Она пересечет окружность в точке  $t_0$ .

Так как для точки  $c$  мы имеем два положения  $c_1$  и  $c_2$ , то задача имеет два решения.

**§ 46. Задача 6.** Даны  $t_0$  и  $\tau_0$ , т. е. изображение точки Чебышева и форма строфоиды  $S$ .

На основании теоремы I и II § 43 точки Бурместра  $A, B, C$  суть точки пересечения прямой

$$y = 1/\tau_0 \cdot x + M_0 \quad (1)$$

со строфоидой  $S$ , и угловые коэффициенты их изображений определяются кубическим уравнением:

$$t^3 + (t_0 + 2\tau_0)t^2 - (1 + 2t_0/\tau_0)t - t_0 = 0. \quad (2)$$

В это уравнение не входит диаметр основной окружности, и мы можем, определяя положение точек  $a, b, c$  на окружности  $D$ , считать, что  $D = D_0$ . В этом предположении мы можем, зная  $t_0$  и  $\tau_0$ , построить прямую (1) и затем найти точки пересечения со строфоидой  $S$  (задача § 7). Спроектировав их из  $O$  на окружность  $D$ , получим точки  $a, b, c$ .

Но можно определить точки  $a, b, c$  и не строя прямой (1) при помощи равносторонней гиперболы.

**Теорема I.** *Изображения  $a, b, c$  точек Бурместра в случае Чебышева пятого порядка суть точки пересечения окружности  $D$  с равносторонней гиперболой*

$$x^2 - 2\tau_0 xy - y^2 + 2M_0(\tau_0 x + y) = 0. \quad (3)$$

Действительно, написав уравнение окружности  $D_0$  и гиперболы в полярных координатах:

$$\begin{aligned} r - D_0 \sin \varphi &= 0, \\ r(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi - 2\tau_0 \sin \varphi \cos \varphi) + 2M_0(\tau_0 \cos \varphi + \sin \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

и исключив из них  $r$  при помощи формул 2 и 3 § 31, мы получим уравнение (2).

Центр гиперболы находится в точке  $M_0$ . Ее ассимптоты параллельны биссектриссам углов между осью  $x$  и прямой  $y = 1/\tau_0 x$ , и она проходит через начало координат и точку  $2M_0$ .

По этим свойствам гипербола легко может быть построена и затем могут быть найдены точки  $a, b, c$  ее пересечения с окружностью  $D_0$ .

Гипербола (3) зависит от положения точки  $M_0$  и величины  $\tau_0$ , т. е. от  $t_0$  и  $\tau_0$ . Для решения задачи можно воспользоваться другой равносторонней гиперболой, зависящей только от  $t_0$ , т. е. от формы строфоиды  $S$ .

Действительно, преобразуем строфоиду  $S$  и прямую, пересечение которой со строфоидой надо определить при помощи обратных радиусов векторов. При этом преобразовании зависимость между координатами точки  $(x, y)$  и координатами ее отражения в круге

$$x^2 + y^2 = k^2$$

будет такова:

$$x = k^2 \frac{\xi}{\rho^2}, \quad y = k^2 \frac{\eta}{\rho^2},$$

где

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Строфоида  $S$  преобразуется в гиперболу

$$H_0 \xi \eta + k^2 (t_0 \xi - \eta) = 0, \quad (4)$$

а прямая — в окружность, проходящую через начало координат.

Центр гиперболы

$$\xi_0 = \frac{k^2}{H_0}, \quad \eta_0 = -\frac{k^2 t_0}{H_0}$$

есть полюс по отношению к окружности  $x^2 + y^2 = k^2$  прямой

$$\frac{x}{H_0} - y \frac{t_0}{H_0} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{H_0} + \frac{y}{D_0} = 1,$$

т. е. той прямой, которая соединяет концы диаметров  $D_0$  и  $H_0$  основных окружностей и рассматривалась нами в §§ 8 и 19. Асимптоты гиперболы параллельны координатным осям, и гипербола проходит через начало координат.

Центр гиперболы лежит на радикальной оси  $y = -t_0 x$  основных окружностей, т. е. на прямой, соединяющей начало с фокусом строфоиды  $S$ , и мы можем выбрать величину  $k^2$  так, чтобы центр гиперболы находился в какой угодно наперед заданной точке этой прямой.

Таким образом определение точек пересечения строфоиды  $S$  с произвольной прямой приводится к определению точек пересечения гиперболы (4) с окружностью, проходящей через начало координат.

Рассмотрим при каких условиях изображения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  трех точек, в которых гипербола

$$\xi \eta + \alpha \xi + \beta \eta = 0 \quad (5)$$

с асимптотами параллельными осям координат пересекается с окружностью

$$\xi^2 + \eta^2 - 2l\xi - 2m\eta = 0,$$

проходящей через начало координат, образуют треугольник, точка пересечения высот которого находится на оси  $y$ . Написав уравнение гиперболы и окружности в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi \sin \varphi + \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi &= 0, \\ \rho &= 2l \cos \varphi + 2m \sin \varphi, \end{aligned}$$

находим для определения  $\text{tg } \varphi$  уравнение 3-й степени:

$$\beta \text{tg}^3 \varphi + (\alpha + 2m) \text{tg}^2 \varphi + (\beta + 2l) \text{tg} \varphi + \alpha = 0.$$

Для этого уравнения

$$3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1 = \frac{1}{\beta^2} [lm + l\alpha + m\beta]$$

и следовательно  $3p_3 - p_2(p_1 + p_3) - p_1 = 0$ , если  $lm + la + m\beta = 0$ , т. е. если центр окружности  $(l, m)$  лежит на гиперболе.

**Теорема II.** Пусть  $a, b, c$  — изображения трех точек, в которых пересекается равносторонняя гипербола с асимптотами, параллельными осям координат и окружность, проходящая через начало. Для того чтобы точка пересечения высот треугольника  $abc$  лежала на оси  $y$ , необходимо и достаточно, чтобы центр окружности лежал на гиперболе.

Для решения нашей задачи нам надо определить точки пересечения гиперболы (4) с той окружностью, в которую посредством обратных радиусов векторов преобразуется прямая (1), проходящая через точки  $A, B, C$  Бурместра. По теореме III § 43 точка пересечения высот треугольника  $a, b, c$  находится на оси  $y$ . Из доказанной сейчас теоремы, поэтому, следует, что прямая (1) должна преобразоваться в окружность, центр которой находится на гиперболе (4).

Таким образом мы приходим к следующему решению задачи:

Возьмем произвольную точку на прямой  $y = -t_0x$ , соединяющей начало с фокусом строфоиды  $S$ , и проведем через начало координат равностороннюю гиперболу, центр которой находится в этой точке и асимптоты параллельны осям координат. Из начала проведем прямую  $y = -\tau_0x$ , проходящую через фокус строфоиды  $\Sigma$ , перпендикулярную к прямой (1), и определим точку пересечения ее с гиперболой. Приняв эту точку за центр, опишем окружность, проходящую через начало. Она пересечется с гиперболой в четырех точках, из которых одна будет в начале координат. Проектируя три остальные на окружность  $D$ , мы и получим точки  $a, b, c$ .

**Задача 7.** Даны  $t_0$  и  $z$ , т. е. дана форма строфоиды  $S$  и точка  $z$ . Точку  $c$  мы можем определить, пользуясь уравнением (2) § 43. Это уравнение по отношению к  $c$  третьей степени и отличается от уравнения (1), к которому приводилась предыдущая задача, только тем, что в уравнении (2) вместо  $\tau_0$  стоит  $-z$ . Отсюда следует, что задачу 7 мы должны решать так же, как и задачу 6, положив только  $\tau_0 = -z$ . Мы найдем для  $c$  3 значения. Когда положение точки  $c$  нам известно, задача приводится к задаче 2 или 4 § 44.

**§ 47.** Рассмотрим теперь еще один частный случай расположения точек Бурместра, а именно когда точка Чебышева лежит на одной прямой с точками  $A, B, C$  Бурместра. Так как более трех точек Бурместра на одной прямой лежать не может (строфоиды — кривая третьего порядка), то этот случай может представиться только тогда, когда точка Чебышева  $T_0$  совпадет с одной из точек  $A, B, C$ , напр. с  $C$  и  $c = \tau_0$ . При  $c = \tau_0$  вершины  $c$  и  $\tau_0$  шестиугольника  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  совпадают (фиг. 42), шестиугольник обращается в пятиугольник и сторона  $c\tau_0$  — в касательную к окружности  $D$ .

Уравнения (1) § 35 и (1) § 40 обращаются в

$$ab\tau_0 = t_0, \tag{1}$$

$$a + b = -t_0 - 3\tau_0. \tag{2}$$

Предположим сначала, что условие  $(B)$  не соблюдается, так что других соотношений между величинами  $t_0, \tau_0, a, b$  не существует.

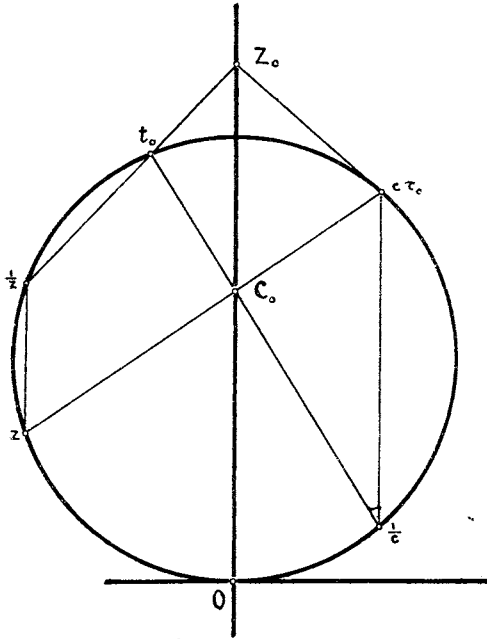
Если мы из (1) и (2) исключим один раз  $t_0$ , а в другой раз  $\tau_0$ , то мы получим:

$$a + b + ab\tau_0 = -3\tau_0, \tag{3}$$

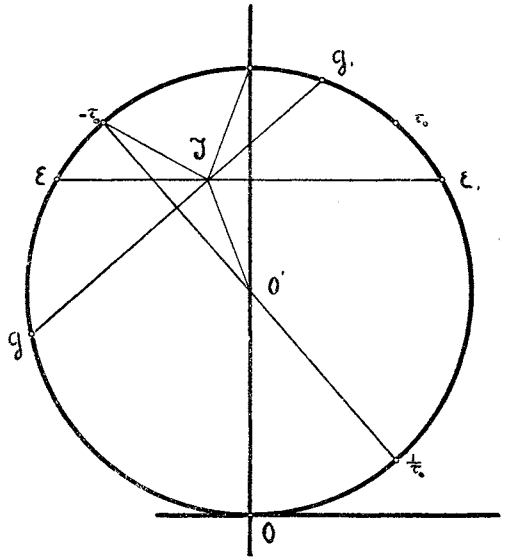
$$(a + b)ab + abt_0 = -3t_0. \tag{4}$$

Уравнение (4) представляет собой частный случай уравнения (3) § 40, и его геометрическое значение получается из теоремы IV § 40, если мы положим  $c = \tau_0$ . Теперь прямая  $y = cx + D$  обратится в прямую  $y = \tau_0 x + D$  (фиг. 43) и пересечется с прямой  $y = -\tau_0 x + D/2$  в точке  $I$ , ордината которой  $y = 3D/4$  не будет зависеть от  $\tau_0$ . Прямая  $y = 3D/4$  служит основанием вписанного в окружность равно-стороннего треугольника, вершина которого находится в начале.

Точка  $I$  служит вершиной равнобедренного треугольника  $O'ID$ . Если мы проведем диаметр  $(1/\tau_0, -\tau_0)$ , то прямая  $O'I$  будет биссектрисой угла  $(D, O', -\tau_0)$ ; треугольник  $O', I, -\tau_0$  будет равен треугольнику  $O'ID$  и будет также равнобедренным. Поэтому, если через  $I$  мы проведем линию, перпендикулярную к диаметру  $(1/\tau_0, -\tau_0)$ , то она разделит радиус  $(O', -\tau_0)$  пополам и будет слу-



Фиг. 42.



Фиг. 43.

жить основанием равно-стороннего треугольника  $1/\tau_0, G, G_1$ , вписанного в окружность, вершина которого находится в точке  $1/\tau_0$ .

Сопоставляя все сказанное, мы приходим к теореме:

**Теорема.** Если две точки Бурместра и точка Чебышева лежат на одной прямой, то угловые коэффициенты их  $a, b, \tau_0$  связаны между собой соотношением

$$a + b + ab\tau_0 = -3\tau_0.$$

Прямая  $ab$  проходит через точку  $I$ , в которой пересекаются прямые

$$y = \tau_0 x + D, \quad y = -\tau_0 x + D/2$$

и основания двух равно-сторонних треугольников, вписанных в окружность  $D$ ; у одного вершина находится в начале координат, у другого — в точке  $1/\tau_0$ .

Так как между 4 величинами  $t_0, \tau_0, a, b$  мы имеем два соотношения (1) и (2), то двумя из них будут определяться остальные. Точки  $a$  и  $b$  играют одинаковую роль и потому могут быть следующие 4 задачи: по данным  $(t_0, \tau_0), (t_0, a), (\tau_0, a), (a, b)$  найти остальные.

**Задача 1.** Для данной точки  $\tau_0$  построить точку  $I$ .

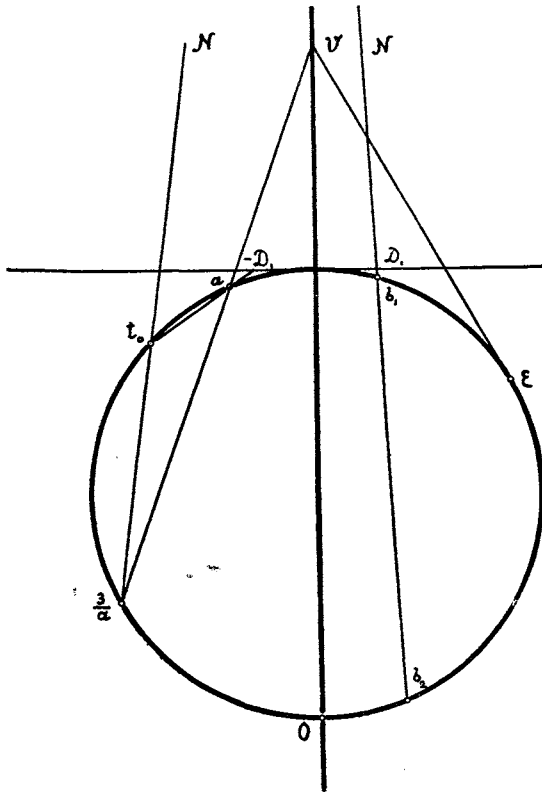
1. Точка  $I$  определяется пересечением прямых  $y = \tau_0 x + D$ ,  $y = -\tau_0 x + D/2$ .

2. Отложим от точки  $D$  две хорды  $DE$  и  $DE_1$ , равные радиусу окружности  $D$ , и соединим их концы прямой  $EE_1$ . Через  $D$  проведем линию параллельную  $O\tau_0$ . Точка пересечения этих прямых и будет точкой  $I$ .

3. Построим два равносторонних треугольника  $OEE_1$  и  $1/\tau_0, G, G_1$  с вершинами в точках  $O$  и  $1/\tau_0$ . Точка пересечения их оснований и будет точкой  $I$ .

**Задача 2.** Даны  $t_0$  и  $\tau_0$ .

1. Эту задачу можно решить, рассматривая ее как частный случай задачи § 40. Теперь в шестиугольнике  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  две вершины совпадают, шестиугольник превращается в пятиугольник  $t_0, 1/\tau_0, \tau_0, \tau_0, z, 1/z, t_0$ , и сторона  $c\tau_0$  в касательную  $\tau_0\tau_0$  к окружности.



Фиг. 44.

2. Так как  $t_0 = \tau_0 ab$ , то прямая  $ab$  должна пройти через точку  $C_0$ , в которой прямая  $(t_0, 1/\tau_0)$  пересекается с осью  $y$ . Кроме того по теореме, прямая  $ab$  должна пройти и через точку  $I$ ; следовательно, соединив точки  $C_0$  и  $I$  прямой  $C_0I$ , мы и получим прямую  $ab$ .

**Задача 3.** Даны  $t_0$  и  $a$ . Для определения  $b$  воспользуемся уравнением (4), решив его графически. Относительно  $b$  оно второго порядка:

$$b^2 + (a + t_0)b + \frac{3t_0}{a} = 0.$$

Построим сначала точку  $3/a$  (фиг. 44). От точки  $D$  отложим хорду  $DE$  равную радиусу; тогда угол  $x OE$  будет равен  $60^\circ$ , и угловой коэффициент точки  $E$  будет  $\sqrt{3}$ . Проведем в точке  $E$  касательную, и пусть она пересечет ось  $y$  в точке  $V$ . Прямая  $Va$  пересечет окружность в точке  $a'$ , угловой коэффициент которой будет равен  $3/a$ . Действительно, так

как касательная в точке  $E$  и прямая  $aa'$  пересекаются на оси  $y$ , то по теореме II § 26  $aa' = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ , откуда  $a' = 3/a$ .

Заметим, что точку  $V$ , необходимую для построения точки  $3/a$ , можно найти без помощи точки  $E$ . В самом деле напишем уравнение касательной в точке  $E$ , положив в уравнении (1) § 26  $t_1 = t_2 \sqrt{3}$

$$2\sqrt{3}x + 2y - 3D = 0.$$

Ордината точки  $V$  равна  $y = 3D/2$ . Таким образом точку  $V$  можно получить, отложив от конца диаметра  $D$  отрезок  $DV$ , равный радиусу окружности  $D$ .

Когда известна точка  $3/a$ , решение задачи заканчивается следующим образом. Определим точку  $N$  пересечения прямой  $(t_0, 3/a)$  с осью  $y$  и точку  $-D_1$  пересече-

чения прямой  $t_0a$  с касательной  $D$ . По точке —  $D_1$  построим симметричную с ней относительно оси  $y$  точку  $D_1$ . Прямая  $D_1N$  пересечет окружность  $D$  в искомой точке  $b$ . Мы получим два положения точки  $b$ ,  $b_1$  и  $b_2$ .

Пусть  $ab$  пересекает ось  $y$  в точке  $C_0$ . Прямая  $C_0t_0$  пересечет окружность в точке  $1/\tau_0$ ; по ней найдем точку  $\tau_0$ .

**Задача 4.** Даны точки  $a, b$ . Определим сначала точку  $I$ . Она лежит на прямой  $ab$  и ордината ее  $= 3D/4$ . Отложим от точки  $D$  хорды  $DE, DE_1$ , равные радиусу, и соединим концы их прямой  $EE_1$ . Точка пересечения прямых  $ab$  и  $EE_1$  и будет точкой  $I$ . Зная точку  $I$ , найдем точку  $\tau_0$ : соединим  $I$  с  $D$  и через  $O$  проведем прямую, параллельную с прямой  $DI$ . Точка пересечения ее с окружностью и будет точкой  $\tau_0$ . Если точку  $C_0$ , в которой прямая  $ab$  пересекается с осью  $y$ , соединим с точкой  $1/\tau_0$  прямой, то получим в пересечении ее с окружностью точку  $t_0$ .

**§ 48.** Предположим, что точка Чебышева лежит на одной прямой с точками  $A$  и  $B$  Бурместра и соблюдается условие (B).

При  $c = \tau_0$  и при существовании условия (B) шестиугольник  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  обращается в пятиугольник, сторона  $c\tau_0$  — в касательную в точке  $\tau_0$  (фиг. 45), диагональ  $(z, 1/\tau_0)$  его должна быть параллельной этой касательной, а линия  $ab$  параллельна диагонали  $(\tau_0, 1/z)$  (теоремы I и III § 41).

Уравнения (1) и (2) § 42 обращаются в

$$a + b + \tau_0 + ab\tau_0 = -2\tau_0, \quad (1)$$

$$(a + b)(1 - \tau_0^2) + 2\tau_0(1 - ab) = 0. \quad (2)$$

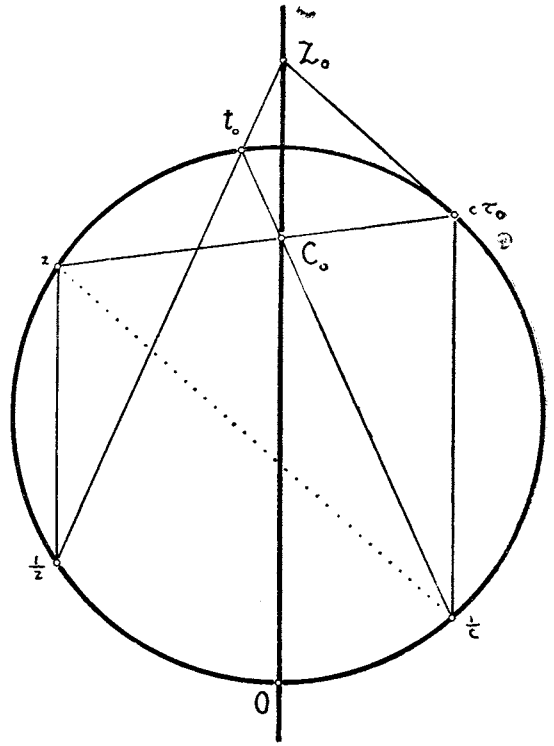
На основании теоремы предыдущего параграфа при существовании равенства (1) линия  $ab$  проходит через точку  $I$ , лежащую на основании равностороннего треугольника, вписанного в окружность, у которого вершиной служит точка  $1/\tau_0$  и высотой — диаметр  $(1/\tau_0, -\tau_0)$ . На основании теоремы II § 42 из равенства (2) следует, что прямая  $ab$  должна быть перпендикулярной к диаметру  $(1/\tau_0, -\tau_0)$ , т. е. к высоте упомянутого равностороннего треугольника. Поэтому при одновременном существовании равенств (1) и (2) треугольник  $a, b, 1/\tau_0$  будет равносторонним.

Мы имеем таким образом следующую теорему:

**Теорема I.** Если в случае Чебышева 5-го порядка точка Чебышева лежит на одной прямой с точками Бурместра, то угловые их коэффициенты связаны двумя соотношениями:

$$a + b + \tau + ab\tau_0 = -2\tau_0$$

$$(a + b)(1 - \tau_0^2) + 2\tau_0(1 - ab) = 0.$$



Фиг. 45.



*Треугольник  $a, b, 1/\tau_0$  равносторонний.*

Последнюю часть этой теоремы можно доказать другим способом. Мы можем воспользоваться теоремой V § 41. По этой теореме  $OAT_0 = 2BAO$ . Но теперь точка  $T_0$  совпадает с точкой  $C$  и лежит на прямой  $AB$ , и потому  $BAT_0 = 180^\circ$  или  $360^\circ$ . Но  $BAT_0 = BAO + OAT_0 = BAO + 2BAO = 3BAO$ . Следовательно,  $BAO = 60^\circ$  или  $120^\circ$ . Так же докажем, что  $ABO = 120^\circ$  или  $60^\circ$ . Треугольник  $ABO$  будет равносторонним.

**Теорема II.** *Если в случае Чебышева 5-ю порядка точка Чебышева лежит на одной прямой с точками  $A$  и  $B$  Бурместра, то треугольник  $OAB$  будет равносторонним.*

Углы между  $OA, OB$  и  $AB$  все равны  $60^\circ$ . Но мы знаем, что при соблюдении условия (B) угловой коэффициент  $AB$  равен  $1/\tau_0$  (теорема II § 43); следовательно, углы между лучами  $Oa, Ob, (O, 1/\tau_0)$  равны  $60^\circ$  и треугольник  $a, b, 1/\tau_0$  равносторонний. Таким образом, теорему I можно рассматривать как следствие теоремы II и обратно.

Присоединим к уравнениям (1) и (2) еще уравнение (1) предыдущего параграфа и исключим из трех уравнений величины  $a$  и  $b$ ; мы получим уравнение между  $t_0$  и  $\tau_0$ :

$$3\tau_0^3 + t\tau_0^2 - \tau_0 - 3t_0 = 0. \quad (3)$$

Между четырьмя величинами  $t_0, \tau_0, a, b$  мы имеем 3 соотношения: (1), (2) и (1) § 46. Поэтому все будут определяться одной из них и, принимая во внимание, что  $a$  и  $b$  играют одинаковую роль, мы имеем три задачи: по данным  $a$ , или  $\tau_0$ , или  $t_0$  определить остальные.

**Задачи 1 и 2.** Даны  $a$  или  $\tau_0$ .

1. По  $\tau_0$  строим пятиугольник, удовлетворяющий указанным в начале параграфа условиям. Через точку  $C_0$  проводим прямую  $ab$ , параллельную  $(\tau_0, 1/2)$ .

2. По данной точке  $a$  или  $\tau_0$  строим равносторонний треугольник и определяем  $t_0$ .

**Задача 3.** Дана точка  $t_0$ . Задача приводится к уравнению (3) третьей степени по отношению к  $\tau_0$ . Оно имеет 3 действительных корня, когда  $t_0$  заключается в пределах

$$-\infty < t_0 < -13, \quad -\frac{1}{13} < t_0 < +\frac{1}{13}, \quad 13 < t_0 < \infty.$$

Во всех остальных случаях оно имеет только один действительный корень.

Корни уравнения (3) мы можем рассматривать как угловые коэффициенты точек пересечения строфоиды  $S$  с прямой  $y = x \operatorname{tg} \theta + M$ , если возможно определить  $\operatorname{tg} \theta$  и  $M$  таким образом, чтобы коэффициенты уравнения (3) сделались равными выражениям (3), (4), (5) § 30:

$$\frac{t_0}{3} = -t_0 + \frac{D_0}{M} t_0, \quad -\frac{1}{3} = 1 - \frac{D_0 t_0}{M} \operatorname{tg} \theta, \quad -t_0 = -t_0.$$

Из первого:

$$M = \frac{3}{4} D_0,$$

из второго:

$$M \operatorname{ctg} \theta = \frac{3}{4} D_0 t_0 = -\frac{3}{4} H_0,$$

и уравнение прямой —

$$\frac{x}{D_0} + \frac{y}{H_0} = \frac{3}{4}. \quad (4)$$

**Теорема III.** *Корни кубического уравнения (3) суть угловые коэффициенты трех точек, в которых строфоида  $S$  пересекается с прямой*

$$\frac{x}{D_0} + \frac{y}{H_0} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом, задача по данному  $t_0$  определить  $\tau_0$  приводится к нахождению точек пересечения строфоиды  $S$  с прямой (4). Мы видели, что эту задачу можно свести к задаче определения точек пересечения гиперболы с окружностью.

**§ 49.** Свойства точек Бурместра  $A, B, X, Y$  и соответствующих им центров кривизны,  $A, B, \Xi, H$  и точек  $C, \Gamma, Z, Z, T_0, T_0, a, b, c, x, y, z, t_0, \tau_0$  вытекают из основных уравнений

$$a + b + x + y = -t_0 - \tau_0, \quad (1)$$

$$abxy = t_0\tau_0, \quad (2)$$

условия (B)

$$(a + b)(1 - xy) + (x + y)(1 - ab) = 0 \quad (3)$$

и уравнений

$$t_0 = abc, \quad t_0 = xyz, \quad t_0 = cz\tau_0, \quad (4)$$

которые мы добавили к трем предыдущим. Как следствие этих уравнений мы вывели еще три:

$$\tau_0 = ab \frac{1}{z}, \quad \tau_0 = xy \frac{1}{c}, \quad \tau_0 = t_0 \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{z}. \quad (5)$$

В этих уравнениях  $a, b, x, y$  представляют собой как угловые коэффициенты точек Бурместра, так и угловые коэффициенты соответствующих им центров кривизны. Величины  $t_0$  и  $\tau_0$  входят в уравнения (1) и (2) совершенно симметрично, в уравнении же (3) совсем не входят, и смысл уравнений (1), (2), (3) поэтому несколько не изменяется, рассматриваем ли мы в них  $a, b, x, y$  как изображения точек Бурместра или же как изображения центров кривизны. Что касается уравнения второй группы, то легко видеть, что уравнения (4) переходят в (5) и обратно, если в них мы заменим  $t_0, \tau_0, c, 1/c, z, 1/z$  через  $\tau_0, t_0, 1/z, z, 1/c, c$ .

Из этого свойства основных уравнений вытекает поэтому такая общая теорема:

**Теорема.** *Всякой теореме, касающейся свойств точек Бурместра и соответствующих центров кривизны, соответствует другая теорема, которая получается из первой заменой букв*

$$A, B, C, X, Y, Z, T_0, A, B, \Gamma, \Xi, H, Z, T_0, t_0, \tau_0, a, b, c, x, y, z$$

буквами

$$A, B, \Gamma, \Xi, H, Z, T_0, A, B, C, X, Y, Z, T_0, \tau_0, t_0, a, b, 1/z, x, y, 1/c.$$

В обращенном движении точки  $A, B, \Xi, H$  подвижны, а точки  $A, B, X, Y$  служат для них центрами кривизны. Совершая указанную замену букв, мы от данного движения переходим к обращенному, а потому предыдущую теорему можно формулировать иначе:

**Теорема II.** *Если при каком-либо движении  $A, B, X, Y$  суть точки Бурместра, а  $A, B, \Xi, H$  — соответствующие им центры кривизны, то при обращенном движении  $A, B, \Xi, H$  будут точками Бурместра, а  $A, B, X, Y$  — центрами кривизны, причем если для первого движения соблюдается условие (B), то оно будет соблюдаться и для второго.*

Выше у нас уже встречались теоремы, соответствующие одна другой в смысле теоремы I. Рассмотрим теперь еще некоторые, аналогичные теоремам §§ 40 и 41.

**§ 50.** Вернемся опять к общему случаю шестиугольника  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$ . Так как прямые  $(t_0, 1/c)$  и  $ab$  пересекаются в точке  $C_0$ , то при вращении прямой  $ab$  вокруг  $c_0$ , точка  $b$  может совпасть с  $t_0$ , а точка  $a$  — с точкой  $1/c$ . Тогда точка Бурместра  $B$ , удалится по строфоиде  $S$  в бесконечность, а соответствующий ей центр придет в точку  $T_0$ . При  $b = t_0$  из уравнения  $abxy = t_0\tau_0$  мы имеем:

$$\tau_0 = ax,$$

что показывает, что в этом случае центры кривизны  $A, \Xi, H$  будут лежать на одной прямой линии.

**Теорема I.** *Если одна из точек Бурместра  $B$ , удалится в бесконечность, то соответствующий ей центр кривизны совпадает с точкой  $T_0$ , а центры кривизны  $A, \Xi, H$  остальных трех точек Бурместра лежат на одной прямой.*

Допустим далее, что соблюдается условие (B). По теореме II § 39 линия  $ab$  должна быть параллельной прямой  $(c, 1/z)$  и, следовательно, точка  $B$  Бурместра может при существовании условия (B) удалиться в бесконечность и прямая  $ba$  — совпасть с  $(t_0, 1/c)$  только в том случае, когда прямая  $(t_0, 1/c)$  параллельна прямой  $(c, 1/z)$ , т. е.

$$\frac{t_0 + 1/c}{1 - t_0/c} = \frac{c + 1/z}{1 - c/z}$$

или

$$\frac{1 + t_0 c}{c - t_0} = \frac{1 + cz}{z - c}. \quad (1)$$

**Теорема II.** *Точка  $B$  Бурместра может удалиться в бесконечность при существовании условия (B) только в том случае, когда диагональ шестиугольника, соединяющая вершины  $c, 1/z$ , будет параллельна стороне  $(t_0, 1/c)$ .*

Можно равенству (1) дать другое толкование, если мы перепишем его таким образом:

$$t_0(c^2 - 2cz + 1) + (c^2z + 2c - z) = 0$$

или

$$\frac{1}{2} \left( c - \frac{1}{c} \right) = \frac{t_0 - 1/z}{1 + t_0/z}.$$

По формуле (3) § 26  $\frac{1}{2}(c - 1/c)$  равняется угловому коэффициенту диаметра, проведенного через точку  $c$ , а вторая часть этого равенства — угловому коэффициенту прямой  $(t_0, -1/z)$  или  $(z, -1/t_0)$ .

**Теорема III.** Точка Бурместра  $B$  может удалиться в бесконечность при существовании условия  $(B)$  только в том случае, если диаметр, проведенный через точку  $c$ , параллелен прямой  $(z, -1/t_0)$ .

Принимая во внимание теорему II § 39, мы к предыдущим теоремам добавим еще следующую:

**Теорема IV.** Если шестиугольник обладает указанными в теореме II или в теореме III свойствами и точка Бурместра  $B$  удалится в бесконечность, то линия  $ba$  совпадет с  $(t_0, 1/c)$ , а линия  $xu$  будет параллельна прямой  $(z, 1/c)$ .

Из этих теорем, соответствующих теоремам I § 40 и I, II, III § 41, можно вывести ряд следствий, соответствующих теоремам §§ 40, 41, 42, 43. На них мы останавливаться не будем.

**§ 51.** Рассмотрим только случай, когда существует точка Чебышева и в то же время одна из трех точек Бурместра,  $B$ , удаляется в бесконечность. В этом случае основные уравнения  $a + b + x + y = -t_0 - \tau_0$  и  $abxy = t_0\tau_0$  должны допускать решение

$$a = 1/c, \quad b = t_0, \quad x = c, \quad y = \tau_0. \quad (1)$$

Эти значения  $a, b, x, y$  всегда удовлетворяют уравнению второму. Подставляя же их в уравнение первое, мы получаем для  $t_0, c, \tau_0$  уравнение

$$c + \tau_0 + 1/c + t_0 = -t_0 - \tau_0$$

или

$$\frac{2D}{c + 1/c} = -\frac{D}{t_0 + \tau_0}.$$

По формуле (2) § 26 величины

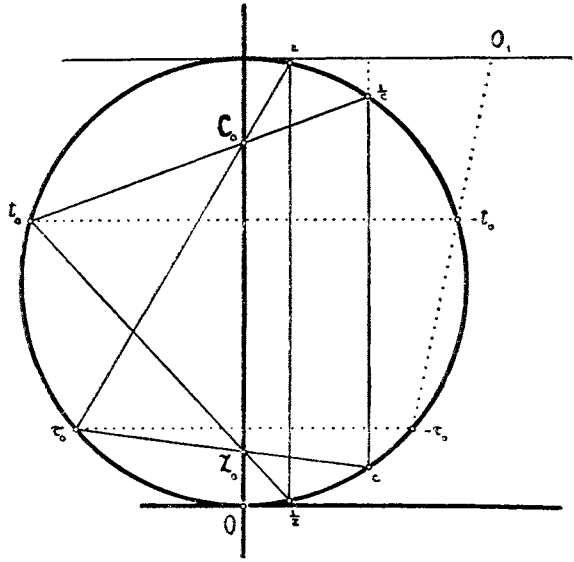
$$\frac{D}{c + 1/c} \quad \text{и} \quad -\frac{D}{t_0 + \tau_0}$$

равны абсциссам точек, в которых хорда  $(c, 1/c)$  и прямая  $(-t_0, -\tau_0)$  пересекают касательную  $D$  (фиг. 46). Вторая точка служит центром инволюции  $D^2$  (см. § 26), и полученное равенство приводит нас к теореме:

**Теорема I.** Для того чтобы в случае Чебышева одна из точек Бурместра,  $B$ , удалась в бесконечность, сторона  $(c, 1/c)$  шестиугольника  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  должна делить отрезок между точкой  $D$  и центром инволюции  $D^2$  пополам.

Из равенства  $ac = 1$  следует, что прямая, соединяющая точки Бурместра  $A$  и  $C$  будет параллельна асимптоте строфоиды  $S$ , а прямая, соединяющая соответствующие центры кривизны  $A$  и  $\Gamma$  будет параллельна асимптоте строфоиды  $\Sigma$  (см. теорему II § 30). Касательная же к траектории точки Чебышева перпендикулярна к направлению  $O\tau_0$ .

**Теорема II.** Если в случае Чебышева одна из точек Бурместра,  $B$  удаляется в бесконечность, то прямая, соединяющая две другие  $AC$ , параллельна асимптоте строфоиды  $S$ ; прямая, соединяющая соответствующие им центры кривизны  $A\Gamma$ , параллельна асимптоте строфоиды  $\Sigma$ .



Фиг. 46.

Подставляя в уравнение (3) § 39, эквивалентное условию (B), значения (1), мы получаем:

$$\left(t_0 + \frac{1}{c}\right)(1 - c\tau_0) + (c + \tau_0)\left(1 - \frac{t_0}{c}\right) = 0,$$

откуда

$$t_0\tau_0 = 1.$$

Сопоставляя этот результат с теоремой I, имеем теорему:

**Теорема III.** *Для того чтобы в случае Чебышева пятого порядка одна из точек Бурместра удалилась в бесконечность, прямая  $t_0\tau_0$  должна быть параллельна оси  $y$ , хорда  $(c, 1/c)$  находится с другой стороны оси  $y$  на расстоянии от оси вдвое меньшем, чем прямая  $t_0\tau_0$ .*

§ 52. После того, как на окружности  $D$  построены изображения точек Бурместра и соответствующих им центров кривизны, необходимо по изображениям построить и самые точки. Доказанные выше теоремы дают разнообразные способы решения этой задачи.

В этих построениях одну из основных окружностей строфоид  $S$  и  $\Sigma$  можно взять произвольно: ее выбор определяет, так сказать, масштаб чертежа. Возьмем произвольно окружность  $D_0$  и спроектируем на нее из начала все точки  $a, b, x, y, \dots$ , положение которых нам уже известно по окружности  $D$ : мы получим тогда положение всех нужных нам точек на окружности  $D_0$ . Мы можем, однако, и не делать этого переноса точек с одной окружности на другую, если мы примем окружность  $D$  за основную окружность  $D_0$ , т. е. с самого начала наших построений возьмем за окружность  $D$  ту, которую впоследствии будем считать окружностью  $D_0$ .

Итак примем, что окружность  $D$ , на которой нам известно положение точек  $a, b, x, y, \dots$ , есть основная окружность  $D_0$ . Чтобы получить окружности  $\Delta_0$  и  $\Pi_0$  соединим точку  $D_0$  с  $t_0$  прямой и определим точку пересечения ее —  $\Pi_0$ , осью  $x$ . Перпендикуляр, опущенный из —  $\Pi_0$  на луч  $O\tau_0$ , пересечет ось  $y$  в точке  $\Delta_0$ . Точка  $\Pi_0$ , симметричная с —  $\Pi_0$  относительно начала, определит окружность  $\Pi_0$ . Спроектировав из начала точки  $a, b, x, y, \dots$  на окружности  $\Delta_0$  и  $\Pi_0$ , мы получим на них изображения точек  $A, B, X, Y, \dots$ .

**Способ 1.** Этот способ основан на свойствах той диаграммы, которая образуется из шестиугольника  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  и двух прямых  $ab$  и  $xy$ . Об этих свойствах было подробно сказано в § 35.

Построим сначала прямую  $T_0CZ$ . Проведем прямую  $cz$  до пересечения с осью  $y$  в точке  $W_0$ . Подошвы перпендикуляров, опущенных из точек  $C_0, Z_0, W_0$  на лучи  $Oc, Oz, Ot_0$ , и будут точками  $C, Z, T_0$ . Эти точки лежат на одной прямой — линии Симпсона треугольника  $\tau_0cz$ .

Когда известна прямая  $T_0CZ$ , то прямые  $ABC$  и  $XYZ$  мы построим, пользуясь равенствами углов

$$\angle T_0CA = \angle \tau_0C_0a, \quad \angle T_0ZX = \angle \tau_0Z_0x_0.$$

Проектируя затем на прямые  $ABC$  и  $XYZ$  точки  $a, b, x, y$ , мы получим точки Бурместра  $A, B, X, Y$ .

Построим затем прямую  $T_0, 1/Z, 1/\Gamma$ . Продолжая луч  $Ot_0$  и опуская на него перпендикуляр —  $W_0T_0$  из точки —  $W_0$ , симметричной с  $W_0$  относительно начала координат, мы получим точку  $T_0$ , ибо эта точка должна находиться на пересечении круга возврата с прямой  $Ot_0$ . Зная точку  $T_0$  и замечая, что  $\angle OT_01/Z =$

$= - \angle OI_0C$ , мы построим прямую  $T_0, 1/$ ,  $1/Z\Gamma$ . Спроектировав на нее точки  $1/z$ ,  $1/c$ , находим точки  $1/Z$  и  $1/\Gamma$ . Через них проводим прямые  $AB\Gamma$  и  $\Xi NZ$ , пользуясь равенствами углов

$$\angle T_0, 1/Z, A = \angle t_0 c_0 a, \angle T_0, 1/\Gamma, \Xi = \angle t_0 z_0 x.$$

На прямые  $AB\Gamma$  и  $\Xi NZ$  проектируем точки  $a, b, x, y$  — получаем точки  $A, B, \Xi, H$ .

**Способ 2.** Мы можем получить точки  $A, B, C, X, Y, Z, T_0$ , построив линии Симпсона для треугольников  $abc, xuz, czt_0$  и спроектировав на них вершины треугольников.

Чтобы воспользоваться этим методом для определения точек  $A, B, \Gamma, H, Z, T_0$ , надо предварительно на окружность  $\Delta_0$  спроектировать точки  $a, b, \dots$  из  $O$  и построить таким образом на ней  $a_2, b_2, \dots$  изображения точек  $A, B, \Gamma, \dots$ .

**Способ 3.** Мы можем пользоваться свойством оси двух лучей и по изображениям двух точек Бурместра, напр.  $a$  и  $b$ , построить, как было указано (§ 32 задача 1), четырехугольник  $ABAB$  в произвольно выбранном масштабе. Совершенно таким же образом мы можем построить четырехугольник  $AХAE$ , причем размеры его определяются тем обстоятельством, что точки  $A$  и  $A$  нам уже известны. Так же построится и четырехугольник  $AУAH$ .

**Способ 4.** Способы 4 и 5 основаны на том, что точки Бурместра  $A, B, X, Y$  лежат на строфоиде  $S$ , а соответствующие им центры кривизны — на строфоиде  $\Sigma$  и для построения их мы можем воспользоваться построениями, которые были даны в §§ 5 и 17.

Построим окружность  $\Delta_0$  и, спроектировав на нее из начала  $O$  точки  $a, b, \dots$  мы получим изображения  $a_2, b_2, \dots$  точек  $A, B, \dots$  на окружности  $\Delta_0$ .

Чтобы построить точку Бурместра  $A$ , изображение которой на окружности  $D_0$  есть  $a$ , и соответствующий центр кривизны  $A$ , изображение которого на окружности  $\Delta_0$  есть  $a_2$ , опускаем из точек  $a$  и  $a_2$  перпендикуляры  $aa_x$  и  $a_2a_{1x}$  на ось  $x$  и через подошвы их  $a_x$  и  $a_{1x}$  проводим две прямые: через  $a_x$  — прямую, параллельную лучу  $Ot_0$ , через  $a_{1x}$  — прямую, параллельную лучу  $Ot_0$  (фиг. 20). Первая пересечет луч  $Oa$  в точке  $A$  Бурместра, вторая — в точке  $A$  — в центре кривизны, соответствующем точке  $A$ . Таким же образом можем построить и другие точки Бурместра и центры кривизны.

По поводу этого построения заметим следующее.

Мы можем обойтись без построения окружности  $\Delta_0$  и переноса точек  $a, b, \dots$  с окружности  $D_0$  на окружность  $\Delta_0$ , ибо для построения точек  $A, B, \dots$  нам надо знать не точки  $a_2, b_2, \dots$ , а только их проекции на ось  $x$ . Если проведем прямые  $D_0a$  и  $\Delta_0a_2$ , то получим две пары подобных треугольников  $Oaa_x, Oa_2a_{1x}$  и  $OD_0a, O\Delta_0a_2$ , которые дают пропорции

$$Oa_x : Oa_{1x} = Oa : Oa_2 = D_0 : \Delta_0,$$

справедливые не только по абсолютной величине, но и в отношении знака. Из этих пропорций следует, что прямые  $D_0a_x$  и  $\Delta_0a_{1x}$  параллельны, и потому мы можем построить точку  $a_{1x}$  без помощи  $a_2$  таким образом:

Построив проекцию  $a_x$  точки  $a$ , проводим через  $\Delta_0$  прямую параллельную  $D_0a_x$ : она пересечет ось  $x$  в точке  $a_{1x}$ . Таким же приемом можно пользоваться

и для построения всех других точек  $b_2, c_2, \dots$  и затем по ним — и центров кривизны  $B, \Xi, \dots$ .

Это построение можно видоизменить, и такое видоизменение оказывается неизбежным, когда точка  $\Delta_0$  находится за пределами чертежа.

В самом деле, чтобы по точке  $a_x$  построить точку  $a_{1x}$ , нам достаточно знать только отношение  $D_0 : \Delta_0$ . Поэтому мы можем в построении, сейчас описанном, вместо точек  $D_0$  и  $\Delta_0$  пользоваться точками  $D$  и  $\Delta$ , лежащими на оси  $y$  и выбранными так, чтобы  $OD : O\Delta = D_0 : \Delta_0$ . Мы поступаем следующим образом:

Берем на оси  $y$  произвольно точку  $D$ ; из нее опускаем перпендикуляр на луч  $Ot_0$  и продолжаем его до пересечения с осью  $x$  в точке —  $H$ . Из точки —  $H$  опускаем перпендикуляр на луч  $O\tau_0$ , который пересечет ось  $y$  в точке  $\Delta$ . Легко видеть, что  $D_0 : \Delta_0 = OD : O\Delta$ .

Чтобы по точке  $a_x$  построить точку  $a_{1x}$ , а затем и точку  $A$ , проведем через  $\Delta$  прямую, параллельную  $Da_x$ . Точка ее пересечения с осью  $x$  и будет точкой  $a_{1x}$ . Прямая, проведенная через  $a_{1x}$  параллельно лучу  $O\tau_0$ , встретит луч  $Oa$  в точке  $A$ .

Так же можно построить и центры кривизны  $B, \Xi, H$ .

Построения окружности  $\Delta_0$  можно избежать еще и другим способом. Линию, которую мы провели через точку  $a_x$  параллельно лучу  $Ot_0$  для того, чтобы построить точку  $A$ , продолжим до пересечения с осью  $y$  в точке  $a_y$ . Прямая, проходящая через  $a_y$ , параллельная лучу  $O\tau_0$ , пересечет луч  $Oa$  в точке  $A$ .

Таким образом без помощи окружности  $\Delta_0$ , пользуясь только окружностью  $D_0$  и изображениями  $a, b, c, x, y, z, \dots$  на ней можно построить точки  $A, B, \dots$ , лежащие на строфоиде  $\Sigma$ .

**Способ 5.** Построение точек Бурместра и соответствующих им центров кривизны будет еще проще, если мы воспользуемся основной окружностью  $H_0$ , центр которой лежит на оси  $x$ , ибо она служит основной окружностью как для строфоиды  $S$ , так и для строфоиды  $\Sigma$ , а следовательно может служить для построения и точек Бурместра, лежащих на строфоиде  $S$ , и соответствующих им центров кривизны, находящихся на строфоиде  $\Sigma$ .

Возьмем произвольную окружность, касающуюся оси  $y$  в начале координат и примем ее за основную окружность  $H_0$ . Выбором окружности  $H_0$  мы определяем масштаб нашего чертежа. Спроектируем на нее из начала все точки  $a, b, \dots$  окружности  $D$ , для которых соответствующие точки строфоид  $S$  и  $\Sigma$  нам надо построить: мы получим изображения на окружности  $H_0$  точек Бурместра и соответствующих им центров кривизны.

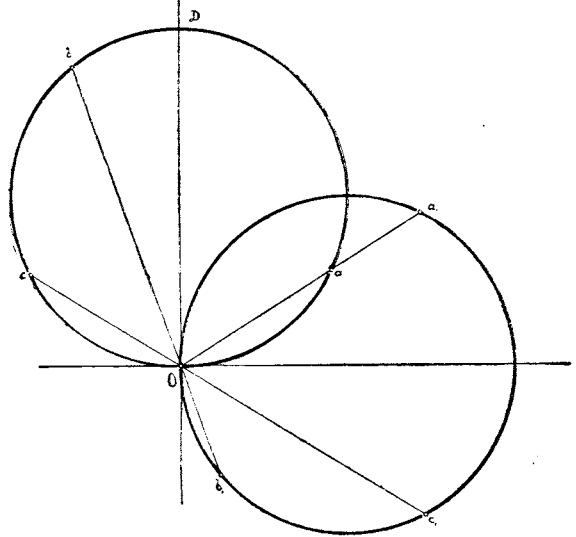
Чтобы построить точку Бурместра  $A$  и центр кривизны  $A$ , изображением которых служит точка  $a_1$ , проводим через  $a_1$  линию, параллельную оси  $x$ , до пересечения с осью  $y$  в точке  $a_y$  и через точку  $a_y$  две прямые, из которых одна параллельна лучу  $Ot_0$ , а другая — лучу  $O\tau_0$ . Луч  $Oa$  пересечется первой прямой в точке  $A$  — строфоиды  $S$  и второй прямой — в точке  $A$  строфоиды  $\Sigma$ . Точка  $A$  будет точкой Бурместра, а точка  $A$  — соответствующим ей центром кривизны.

Таким же образом по изображениям  $b_1, x_1, y_1$  построим и другие точки Бурместра и центры кривизны.

Относительно этого построения сделаем следующее важное замечание.

Чтобы воспользоваться этим построением, мы должны перенести изображения  $a, b, c, \dots$  с окружностей  $D$  на окружность  $H_0$ , т. е. спроектировать точки  $a, b, c, \dots$  окружности  $D$  из начала координат в точки  $a_1, b_1, c_1, \dots$  на окружности  $H_0$ . Так как углы  $DOa, DOb, \dots$  (фиг. 4.) соответственно равны углам  $OH_0a_1, OH_0b_2, \dots$ , то фигура, образованная точками  $D, O, a, b, c, \dots$  на окружности  $D$  будет по-

добна фигуре, образованной точками  $O, H_0, a_1, b_1, c_1, \dots$  на окружности  $H_0$ , причем соответствующие точки фигур лежат на одной прямой, проходящей через точку  $O$ . Если радиусы окружностей  $H_0$  и  $D$  мы возьмем равными, то эти фигуры будут равны, и мы могли бы первую совместить со второй, повернув окружность  $D$  на  $90^\circ$  по направлению от оси  $x$  к оси  $y$  и наложив ее диаметр  $OD$  на диаметр  $H_0O$  окружности  $H_0$ . Тогда касательная  $D$  к окружности  $D$  совпала бы с осью  $y$ , а диаметр  $OD$  — с осью  $x$ . Если же для нас безразлично, как будет ориентирована на плоскости окончательная фигура, образованная точками Бурместра и соответствующими им центрами кривизны, то такого поворота мы можем и не делать, достаточно только, не изменяя ни положения окружности  $D$ , ни точек  $a, b, c, \dots$  на ней, принять окружность  $D$  за основную окружность  $H_0$ , общую обоим строфоидам, начало поместить в точке  $D$ , касательную  $D$  принять за ось  $y$  и старую ось  $y$  — за новую ось  $x$  и дальше вести построение так, как было указано выше. Окончательная фигура, которую мы таким образом получим, будет отличаться от той, которую мы получили бы, спроектировав точки  $a, b, c, \dots$  на окружность  $H_0$ , только поворотом на  $90^\circ$ .



Фиг. 47.

**Теорема.** Окружность  $D$ , на которой мы строили изображения точек Бурместра и соответствующих им центров кривизны, мы можем принять за основную окружность  $H_0$ , общую обоим строфоидам  $S$  и  $\Sigma$ , если начало координат поместим в точке  $D$ , касательную в этой точке примем за ось  $y$ , а диаметр через нее проходящий — за ось  $x$ .

## ГЛАВА V.

**§ 53.** В этой главе мы рассмотрим случаи вырождения шестиугольника  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  и строфоид  $S$  и  $\Sigma$  и случай, когда угловая скорость  $\omega = 0$ .

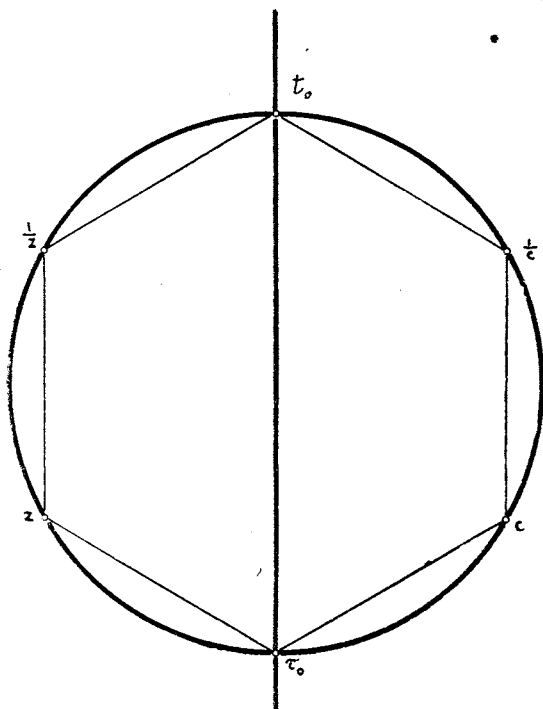
Установить возможные формы шестиугольника будет легче, если мы будем представлять его себе схематически в виде шестиугольника правильного (фиг. 48). Нетрудно видеть, что мы всегда можем изменить обозначения точек  $c, z, 1/c, 1/z$ , и потому два случая, отличающиеся один от другого заменой  $c$  через  $z$  и обратно случай, так сказать, симметричные относительно оси  $t_0\tau_0$ , можно рассматривать как несущественно различные.

**Случай I.** Три случая, когда совпадают две соседние вершины и шестиугольник обращается в пятиугольник (фиг. 49).

**Случай II.** Два случая, когда совпадают две вершины через одну. Тогда обязательно совпадают и две другие вершины, соседние с первыми двумя, и совпадают две из трех точек  $C_0, Z_0, \infty$ , в которых пересекаются противоположные



стороны шестиугольника. Шестиугольник обращается в ломаную линию, состоящую из трех отрезков.



Фиг. 48.

§ 54. Если  $W_{1y} = 0$ , то

$$t_0 = -\frac{3W_0}{W_{1x}}, \quad \tau_0 = \frac{W_{1y}}{W_{1x}} = 0, \quad D_0 = -\frac{3W_0^2}{W_{1y} - 3W_0} = W_0, \quad M_0 = \frac{W_0}{2} = \frac{D_0}{2}, \quad (1)$$

и строфоида  $\Sigma$  распадается на ось  $x$  и окружность  $\Pi_0$ . В этом случае уравнение (1) § 33 имеет один корень  $t = y = 0$ , который соответствует точке Бурместра  $Y$ , находящейся в начале координат (теорема II § 25), и для определения угловых коэффициентов  $a, b, x$  трех других точек Бурместра  $A, B, X$  дает нам уравнение третьей степени:

$$B_1^2 c_1 t^3 - B_1 a_0 (W_0 b_1 + c_1) t^2 + (W_0 a_0^2 B_2 - W_0 a_0 a_1 B_1 + c_1 B_1^2) t + (W_0 a_0^2 A_2 - B_1 c_1 a_0) = 0. \quad (2)$$

Те из трех точек  $A, B, X$  будут 5-го порядка, угловые коэффициенты которых  $a, b, x$  удовлетворяют уравнению (2) § 33. Это последнее теперь обращается в уравнение третьей степени:

$$B_1^2 c_2 t^3 - a_0 B_1 (W_0 b_2 + c_2) t^2 + (W_0 a_0^2 B_3 - W_0 a_0 a_1 B_1 + c_2 B_1^2) t + (W_0 a_0^2 A_3 - B_1 c_2 a_0) = 0. \quad (3)$$

Сравнивая коэффициенты этих уравнений, мы приходим к таким заключениям: Если одна из точек Бурместра,  $A, B, X$  будет 5-го порядка и притом

**Случай III.** Если совпадают две противоположные вершины, то обе строфоиды делаются тождественными.

**Случай IV.** Пять случаев, когда совпадают две пары соседних вершин и шестиугольник обращается в четырехугольник.

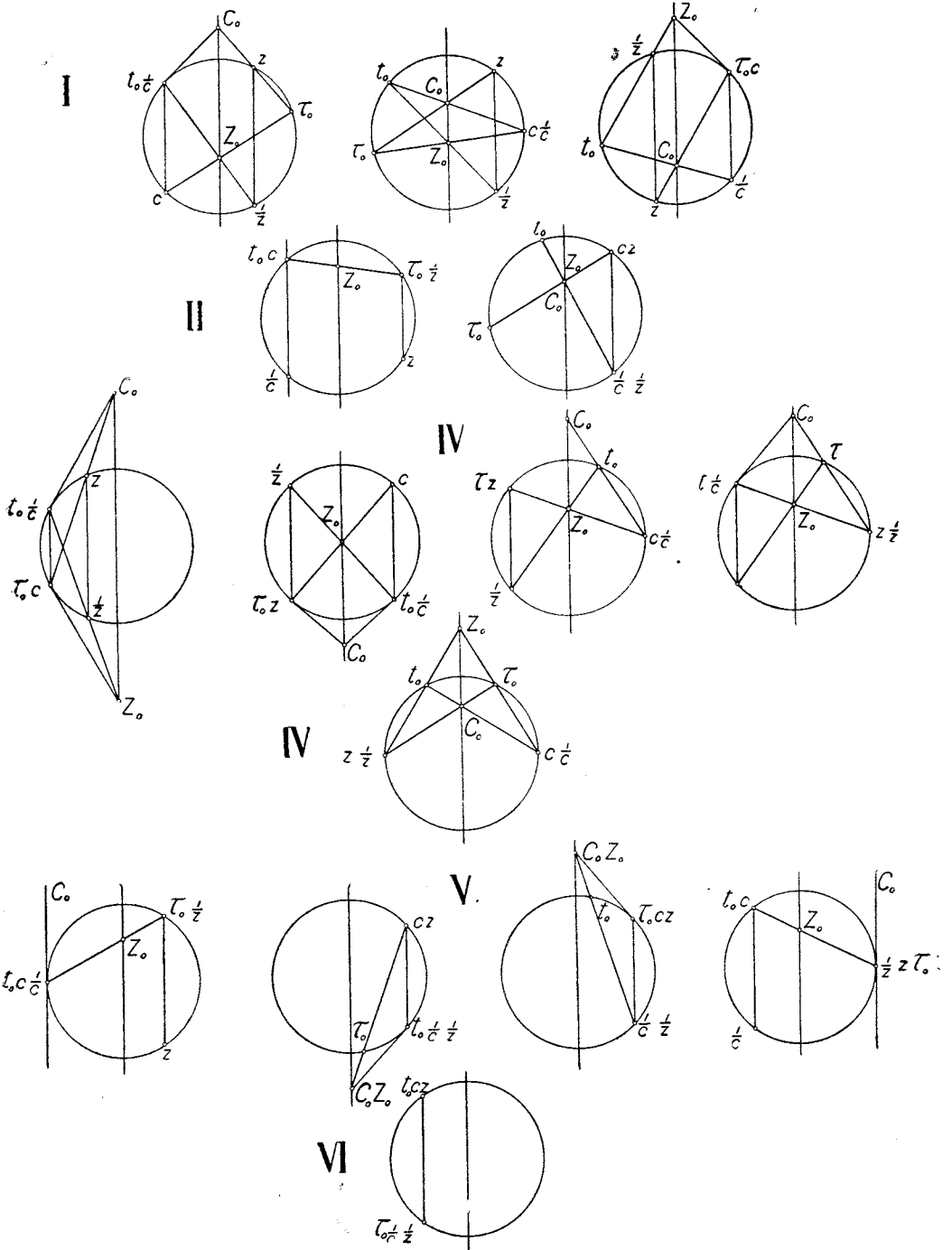
**Случай V.** Четыре случая, когда совпадают три соседние вершины. Тогда шестиугольник обращается в ломаную линию, состоящую из двух отрезков, и две из точек  $C_0, Z_0, \infty$  совпадают.

**Случай VI.** Когда совпадают три вершины через одну.

Некоторые из этих случаев были рассмотрены в предыдущей главе; на остальных мы останавливаться не будем, а перейдем теперь к случаям, которые не вошли в предыдущую таблицу, а именно, когда одна или обе строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  вырождаются.

три из четырех коэффициентов одного уравнения будут пропорциональны соответствующим коэффициентам другого, напр.

$$\frac{B_1^2 c_1}{B_1^2 c_2} = \frac{W_0 b_1 + c_1}{W_0 b_2 + c_2} = \frac{W_0 a_0^2 A_2 - B_1 c_1 a_0}{W_0 a_0^2 A_3 - B_1 c_2 a_2}$$



Фиг. 49.

или

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{A_2}{A_3}$$

или

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0, \quad (B)$$

$$c_1 A_3 - c_2 A_2 = 0, \quad (D)$$

то две другие точки будут 5-го порядка; будет 5-го порядка и точка, лежащая в начале координат (теорема II § 25).

Если две из точек  $A, B, X$  будут 5-го порядка и притом будет иметь место условие (B), то и третья точка будет 5-го порядка, будет соблюдаться условие (D) и по теореме II § 25 точка Бурместра  $Y$ , находящаяся в начале координат тоже будет 5-го порядка.

Обратно, если при условии (B) точка  $Y$  и одна из точек  $A, B, X$  будут 5-го порядка, то на основании той же теоремы будет иметь место условие (D) и, как сейчас мы видели, обе другие точки, не лежащие на оси  $x$ , будут 5-го порядка. Таким образом, теоремы II и V § 21 сохраняются и в рассматриваемом нами случае.

Так как  $a, b, x$  суть корни уравнения (2), то

$$a + b + x = \frac{a_0(W_0 b_1 + c_1)}{B_1 c_1} = \frac{3 W_0}{W_{1x}},$$

$$abx = \frac{a_0(W_0 A_2 a_0 - B_1 c_1)}{B_1^2 c_1} = -3 W_0 \frac{W_{2x} + W_{1x}}{W_{1x}^2},$$

или, принимая во внимание равенства (2) § 25,

$$a + b + x = -t_0, \quad (4)$$

$$abx = t_0 \left(1 - \frac{H_0}{\rho}\right) = t_0 \left(\frac{1 + D_0 t_0}{\rho}\right), \quad (5)$$

где  $\rho$  есть абсцисса центра кривизны точки  $Y$ . К этим двум уравнениям мы присоединим третье:

$$abc = t_0, \quad (6)$$

в котором, как и раньше,  $c$  обозначает угловой коэффициент точки  $c$  пересечения прямой  $AB$  со строфоидой  $S$ . Уравнения (4) и (5) мы можем рассматривать как частные случаи уравнений (4), (5) § 33 при  $y = \tau_0 = 0$ . Что касается уравнений

$$t_0 = xyz, \quad t_0 = cz\tau_0,$$

то они при  $\tau_0 = y = 0$  дают нам  $1/z = 0, z = \infty$ . Таким образом, в шестиугольнике  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  вершины  $\tau_0, 1/z$  совпадают с началом координат, вершина  $z$  с точкой  $D$ , а стороны  $\tau_0 z$  и  $(z, 1/z)$  — с осью  $y$ , и вместо шестиугольника мы можем рассматривать четырехугольник  $t_0, 1/c, c, O, t_0$  (фиг. 50). Как видно из равенства  $t_0 = abc$ , прямая  $ab$  проходит через точку  $C_0$  пересечения прямой  $(t_0, 1/c)$  с осью  $y$ , точка  $Z_0$  совпадает с началом координат и прямая  $xu$  обращается в  $Ox$ .

**Теорема I.** При  $W_{1y} = 0$ , точки  $\tau_0, z, Z_0$  совпадают с началом координат, точка  $z$  — с точкой  $D$ , и шестиугольник распадается на четырехугольник  $t_0, 1/c, c, O, t_0$  и диаметр окружности  $D$ .

Зависимость между прямыми  $ab$  и  $Ox$  можно установить при помощи теоремы I § 34, видоизменяя ее надлежащим образом, или при помощи перспективной оси § 37. Но равенство (4) дает возможность представить эту зависимость в более простой форме.

По формуле (2) § 26 абсциссы точек  $C_1$  и  $Z_1$ , в которых прямые  $ab$  и  $t_0x$  пересекают касательную  $D$  соответственно равны,

$$\frac{D}{t_0 + x} \quad \text{и} \quad \frac{D}{a + b}.$$

На основании уравнения (4) эти абсциссы по абсолютной величине равны, а по знаку — противоположны.

**Теорема II.** При  $W_{1y} = 0$  точки  $C_1$  и  $Z_1$ , в которых прямые  $ab$  и  $t_0x$  пересекают касательную  $D$ , расположены с разных сторон точки  $D$  на равных расстояниях.

Зная  $c$  и  $x$ , мы можем двумя способами построить центр кривизны, соответствующий точке Бурместра  $Y$ , лежащей в начале координат. Решая уравнения (5) и (6) относительно  $q$ , мы имеем:

$$q = -\frac{D_0 c \cdot 1/x}{1 - c/x} t_0 = \frac{H_0}{1 - x/c}. \quad (7)$$

Величина

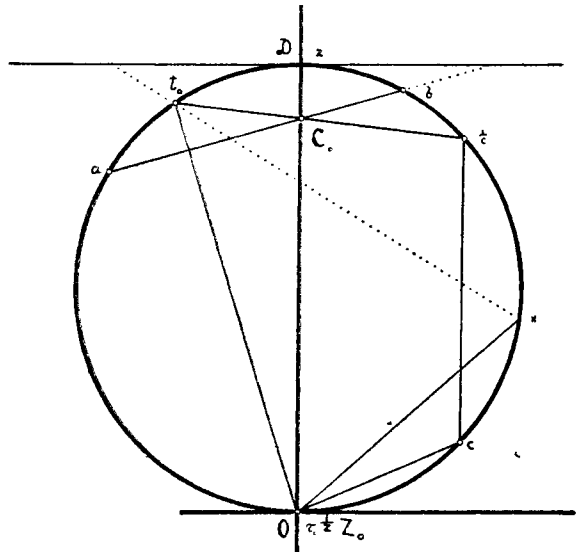
$$\frac{D_0 c \cdot 1/x}{1 - c/x}$$

есть ордината точки  $V$ , в которой прямая  $(c, 1/x)$  пересекает ось  $y$  [форм. (2) § 26]. Опуская из  $V$  перпендикуляр на прямую  $(0, -t_0)$ , в пересечении его с осью  $x$  мы получим центр кривизны  $H(q, 0)$ , соответствующий точке  $Y$ .

Построим окружность  $\Pi_0$  и на нее спроектируем точки  $x$  и  $1/c$  из начала координат в точки  $\Xi$  и  $1/\Gamma$ ; так как окружность  $\Pi_0$  образует часть строфиоды  $\Sigma$ , то точка  $\Xi$  будет центром кривизны, соответствующим точке  $X$  Бурместра. Из равенства (7) и форм. (6) § 26 следует, что прямая  $\Xi, 1/\Gamma$  пересечет ось  $x$  в центре кривизны  $\Pi(q, 0)$ .

**Теорема III.** Если точки  $x$  и  $1/c$  спроектируем на окружность  $\Pi_0$  в точки  $\Xi$  и  $1/\Gamma$ , то прямая  $\Xi, 1/\Gamma$  пересечет ось  $x$  в центре кривизны точки Бурместра  $Y$ , совпадающей с мгновенным центром.

Теоремы I, II и III дают нам возможность решать различные задачи на построение точек  $t_0, a, b, c, x$ , а по ним и точек Бурместра  $A, B, X, Y$  и соответствующих им центров кривизны  $A, B, \Xi$  и  $H$ , из которых первые три будут лежать на основной окружности  $\Pi_0$ , а последний — на оси  $x$ . На решении этих задач останавливаться не будем. Мы обратим внимание только на два частных случая:



Фиг. 50.

**Случай 1.** Соблюдается условие (B) § 21, которое при  $W_{1y} = 0$  обращается в  $W_{2x} + 2W_{1x} = 0$ . В этом случае

$$\rho = -\frac{3W_0^2}{W_{2x}^2} = \frac{3W_0^2}{2W_{1x}^2} = \frac{H_0}{2},$$

$$x = -c$$

и уравнение (4) принимает вид:

$$a + b - c = -t_0 = -abc,$$

откуда:

$$c = \frac{a + b}{1 - ab}.$$

**Теорема IV.** При условии (B)  $x = -c$ , прямая  $ab$  параллельна  $Oc$  и основная окружность  $H_0$  служит кругом кривизны для точки Бурместра, находящейся в начале координат.

**Случай 2.** Соблюдается условие (A) § 23, которое при  $W_{1y} = 0$  обращается в  $W_{2x} = 0$ . В этом случае

$$\rho = -\frac{3W_0^2}{W_{2x}^2} = \infty,$$

$$x = c, \tag{8}$$

и уравнение (4) обращается в:

$$a + b + c + abc = 0. \tag{9}$$

Уравнение (8) показывает нам, что точка Бурместра  $X$  совпадает с точкой  $C$ , так что три точки Бурместра  $A, B, X \equiv C$  лежат на одной прямой. Эта прямая проходит через центр круга  $D_0$ , ибо  $M_0 = \frac{W_0}{2} = \frac{D_0}{2}$  (теорема III § 40). Точке  $Y$  соответствует бесконечно большой радиус, и мы должны ее считать точкой Чебышева. Уравнение (9) представляет собой частный случай уравнения (3) § 40 при  $\tau_0 = 0$ , и его геометрическое значение определяется теоремой IV § 40.

**Теорема V.** В случае Чебышева точка Чебышева совпадает с множенным центром. Три точки Бурместра лежат на прямой, проходящей через центр основной окружности  $D_0$ .

**§ 55.** Если  $W_{1y} = 3W_0$ , или  $A_1 = a_0$ , то

$$t_0 = 0, \tau_0 = \frac{3W_0}{W_{1x}}, D_0 = \infty, \Delta_0 = -W_0, M_0 = +\frac{A_0}{2} = -\frac{W_0}{2},$$

и строфоида  $S$  распадается на ось  $x$  и основную окружность  $H_0$  (теорема I § 25). При  $A_1 = a_0$  уравнение (2) § 33 имеет корень  $t = y = 0$ : одна из точек Бурместра лежит на оси  $x$  (теорема I § 25) и соответствующий ей центр кривизны находится в начале координат. Угловые коэффициенты  $a, b, x$  трех других точек Бурместра будут корнями уравнения третьей степени:

$$B_1^2 c_1 t^3 + (B_1 a_0 c_1 - W_0 a_0 b_1 B_1) t^2 + (W_0 a_0^2 B_2 - B_1 W_0 a_0 a_1 + c_1 B_1^2 - W_0 a_0^2 b_1) t + (W_0 a_0^2 A_2 - W_0 A_1 a_0 a_1 + B_1 c_1 a_0) = 0. \tag{2}$$

Те из точек Бурместра  $A, B, X$  будут 5-го порядка, угловые коэффи-

циенты которых будут удовлетворять уравнению (3) § 33, принимающему при  $A_1 = a_0$  вид:

$$B_1^2 c_2 t^3 + (B_1 a_0 c_2 - W_0 a_0 b_2 B_1) t^2 + (W_0 a_0^2 B_3 - W_0 a_0 a_2 B_1 + c_2 B_1^2 - W_0 a_0^2 b_2) t + (W_0 a_0^2 A_3 - W_0 a_0^2 a_2 + B_1 c_2 a_0) = 0. \quad (3)$$

Сравнивая коэффициенты уравнений (2) и (3), мы приходим к таким заключениям:

Если одна из точек Бурместра  $A$ ,  $B$ ,  $X$  будет 5-го порядка и притом

$$\frac{B_1^2 c_1}{B_1^2 c_2} = \frac{B_1 a_0 c_1 - W_0 b_1 B_1}{B_1 a_0 c_2 - W_0 b_2 B_1} = \frac{W_0 a_0^2 A_2 - W_0 a_0^2 a_2 + B_1 c_1 a_0}{W_0 a_0^2 A_3 - W_0 a_0^2 a_2 + B_1 c_2 a_0}$$

или

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{A_2 - a_1}{A_3 - a_2},$$

или

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0, \quad (B)$$

$$c_1(A_3 - a_2) - c_2(A_2 - a_1) = 0, \quad (D)$$

то и две другие будут 5-го порядка.

Если две из точек  $A$ ,  $B$ ,  $X$  будут 5-го порядка, и притом будет иметь место условие (B), то и третья точка будет 5-го порядка.

Сопоставляя эти свойства точек  $A$ ,  $B$ ,  $X$  со свойством точки  $Y$ , лежащей на оси  $x$  (теорема I § 25), мы видим, что теоремы II и V остаются справедливыми и в случае  $W_{1y} = 3W_0$ .

Так как  $a$ ,  $b$ ,  $x$  суть корни кубического уравнения (2), то мы имеем:

$$a + b + x = -\frac{B_1 a_0 (c_1 - W_0 b_1)}{B_1^2 c_1} = -\frac{3W_0}{W_{1x}}$$

$$abx = -\frac{a_0 (W_0 a_0 A_2 - W_0 a_0 a_1 + B_1 c_1)}{B_1^2 c_1} = -\left(\frac{W_{2x}}{W_{1x}} - 5\right) \frac{3W_0}{W_{1x}}$$

или, принимая во внимание равенство (1) § 25 и (1):

$$a + b + x = -\tau_0, \quad (4)$$

$$abx = \tau_0 \left(1 - \frac{H_0}{\varrho}\right) = \tau_0 \left(1 + \frac{D_0 t_0}{\varrho}\right), \quad (5)$$

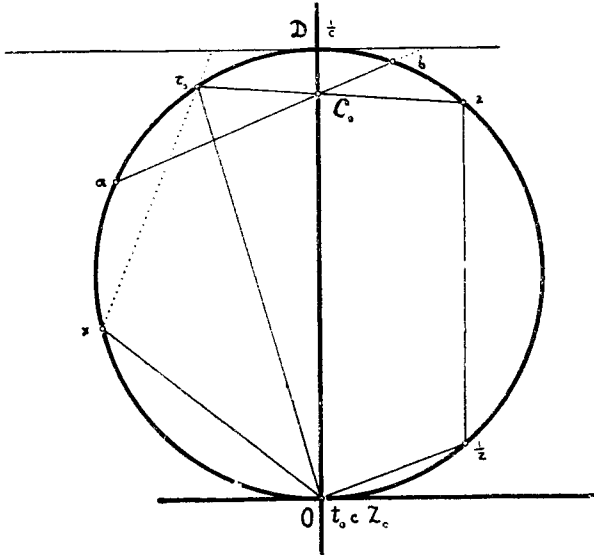
где  $\varrho$  есть абсцисса точки  $Y$ , лежащей на оси  $x$ . К этим двум уравнениям мы присоединим третье. Проведем прямую, соединяющую центры кривизны  $A$  и  $B$ , до пересечения со строфоидой  $\Sigma$  в точке  $\Gamma$ ; изображение ее на окружности  $D$  обозначим через  $1/z$ . Мы будем иметь:

$$ab \frac{1}{z} = \tau_0$$

или

$$ab = \tau_0 z. \quad (6)$$

Уравнения (4) и (5) мы можем рассматривать как частные случаи уравнений (4) и (5) § 33 при  $y = t_0 = 0$ . Что же касается уравнения  $t_0 = abc$ , то оно при  $t_0 = 0$  дает нам  $c = 0$ ,  $1/c = \infty$ . Таким образом в шестиугольнике  $t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$  вершины  $t_0, c$  совпадают с началом координат, вершина  $1/c$  — с точкой  $D$ , стороны  $(t_0, 1/c)$  и  $(1/c, c)$  — с осью  $y$ , и вместо шестиугольника мы можем рассматривать четырехугольник  $O, \tau_0, z, 1/z, O$  (фиг. 51). Как видно из равенства (6),



Фиг. 51.

прямая  $ab$  проходит через точку  $C_0$ , в которой ось  $y$  пересекается стороной  $\tau_0 z$  четырехугольника, точка  $Z_0$  находится в начале координат, и прямая  $xu$  обращается в  $Ox$ .

**Теорема I.** При  $W_{1y} = 3W_0$  точки  $t_0, c, Z_0$  совпадают с началом координат, точка  $1/c$  — с точкой  $D$ , и шестиугольник распадается на четырехугольник  $O, \tau_0, z, 1/z, O$  и диаметр  $OD$  окружности  $D$ .

Уравнения (4), (5) и (6) отличаются от уравнений (4), (5) и (6) предыдущего параграфа только тем, что в них вместо  $t_0$  и  $c$  стоят  $\tau_0$  и  $1/z$ . Не повторяя

доказательств, мы можем поэтому формулировать следующие две теоремы:

**Теорема II.** При  $W_{1y} = 3W_0$  точки  $C_1$  и  $Z_1$ , в которых прямые  $ab$  и  $\tau_0 x$  пересекают касательную  $D$ , расположены с разных сторон точки  $D$  на равных от нее расстояниях.

**Теорема III.** Если точки  $x$  и  $z$  мы спроектируем на окружность  $H_0$  в точки  $X$  и  $Z'$ , то прямая  $XZ'$  пересечет ось  $x$  в точке Бурместра  $Y$ .

Эти три теоремы позволяют легко решать задачи на построение на окружности  $D$  точек  $\tau_0, a, b, z, x$ . По этим точкам можно затем построить и точки Бурместра  $A, B, X, Y$  и соответствующие им центры кривизны. Точки  $A, B, X$  будут лежать на основной окружности  $H_0$ , а точка  $Y$  на оси  $x$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи.

**Случай 1.** Соблюдается условие (B), которое при  $W_{1y} = 3W_0$  обращается в  $W_{2x} = 6W_{1x}$ . В этом случае

$$\varrho = + \frac{3W_0^2}{W_{2x} - 4W_{1x}} = + \frac{3W_0^2}{2W_{1x}} = \frac{H_0}{2},$$

$$x = - \frac{1}{z},$$

и уравнение (4) обращается в следующее:

$$a + b + x = abx,$$

откуда

$$-x = + \frac{1}{z} = \frac{a + b}{1 - ab}.$$

**Теорема IV.** При условии (B)  $x = -1/z$ , прямая  $ab$  параллельна прямой  $(O, 1/z)$ , и точка  $Y$  совпадает с центром основной окружности  $\Pi_0$ .

**Случай 2, Чебышева.** Пусть  $x = \tau_0$  есть изображение точки Чебышева. Подставляя это значение  $x$  в формулу (5), мы получаем для абсциссы точки  $Y$ :

$$\varrho = \frac{H_0}{1 - ab}. \quad (7)$$

Но, с другой стороны, точки  $A$  и  $B$  лежат на окружности  $\Pi_0$  и, по формуле (6) § 26,  $\varrho$  будет абсциссой точки пересечения прямой  $AB$  с осью  $x$ ; следовательно,  $AB$  проходит через точку  $Y$ , иначе говоря, точки  $A, B, Y$  лежат на одной прямой линии.

При  $x = \tau_0$  уравнение (4) обращается в

$$a + b = -2\tau_0.$$

Его можно рассматривать как частный случай уравнения (3) § 40 при  $c = 0$ , и его геометрическое толкование дает теорема IV того же параграфа.

Переписав его таким образом:

$$a + b = -\tau_0 - \tau_0,$$

мы имеем на основании формул (2) § 26 такую теорему:

**Теорема V.** В случае Чебышева касательная к окружности  $D$  в точке  $\tau_0$  и прямая  $ab$  пересекают касательную  $D$  в точках, расположенных с разных сторон точки  $D$  на равных расстояниях от нее.

**Случай 3, Чебышева, пятого порядка.** Из равенства  $x = -1/z$ , которое мы имеем при условии (B) и равенства  $x = \tau_0$ , в случае Чебышева, мы получаем:

$$z\tau_0 = -1,$$

и затем из равенства  $ab = z\tau_0$ ,  $ab = -1$ . При этом равенство (7) обращается в

$$\varrho = \frac{H_0}{2}.$$

**Теорема VI.** В случае Чебышева пятого порядка линии  $ab$  и  $z\tau_0$  проходят через центр окружности  $D$ , линия  $ab$  параллельна прямой  $(O, 1/z)$ . Прямая  $AUB$  проходит через центр основной окружности  $\Pi_0$ .

§ 56. Если  $\Pi_{1x} = 0$ , то

$$t_0 = \infty, \quad \tau_0 = \infty,$$

и по теореме I § 23 обе строфоиды  $S$  и  $\Sigma$  распадаются каждая на ось  $y$  и на основную окружность  $D_0$  и  $\Delta_0$ . Две точки Бурместра лежат на оси  $y$ , их ординаты определяются уравнением:

$$B_2y^2 - (y - W_0)(b_1y + c_1) = 0. \quad (1)$$

Две другие точки — на основной окружности  $D_0$  в точках пересечения ее с прямой

$$a_0(A_2x + B_2y) - A_1(b_1y + c_1) = 0. \quad (2)$$



Только те из точек Бурместра будут 5-го порядка, координаты которых удовлетворяют уравнению (6'') § 14. Решая его совместно с уравнением строфоиды  $S$  и полагая сначала  $x=0$ , потом  $r^2 - D_0 y = 0$ , мы получаем:

$$B_3 y - b_2 (y - W_0) = 0 \quad (3)$$

и

$$(A_3 x + B_3 y) - \frac{D_0 - W_0}{D_0} (a_2 x + b_2 y) = 0$$

или, замечая, что

$$\frac{D_0 - W_0}{D_0} = \frac{W_{1y}}{3W_0}$$

$$(3W_0 A_3 - W_{1y} a_2) x + (3W_0 B_3 - W_{1y} b_2) y = 0. \quad (4)$$

Первому уравнению должны удовлетворять ординаты точек Бурместра, лежащих на оси  $y$ , а второму — координаты точки на окружности  $D_0$  для того, чтобы эти точки были 5-го порядка.

Предположим сначала, что обе точки, лежащие на оси  $y$ , будут пятого порядка. Координаты обеих должны удовлетворять уравнению (3), что возможно только в том случае, если оно обратится в тождество, т. е.

$$A_2 = b_2 = W_{2x} = 0 \quad (B)$$

$$B_3 = W_{3x} = 0. \quad (C)$$

Первое из этих равенств представляет собой условие (B), второе — условие (C) при  $W_{1x} = 0$ . При первом, прямая (2), соединяющая две точки Бурместра, расположенные на окружности  $D_0$ , будет параллельна оси  $x$ . При втором уравнение (4) обращается в

$$(3W_0 A_3 - W_{1y} a_2) x = 0.$$

Поэтому точки Бурместра, лежащие на окружности  $D_0$ , будут или обе 4-го или обе 5-го порядка, смотря потому будет ли

$$3W_0 A_3 - W_{1y} a_2 \neq \text{или} = 0. \quad (D)$$

Последнее равенство представляет собой условие (D) при  $W_{1x} = 0$ , и мы имеем теорему:

**Теорема I.** Если две точки, лежащие на оси  $y$ , будут 5-го порядка, то прямая, соединяющая точки, находящиеся на окружности  $D_0$ , будет параллельна оси  $x$ , и обе последние точки будут 5-го или 4-го порядка, смотря по тому, будет ли соблюдаться условие (D) или нет.

Предположим затем, что обе точки, лежащие на окружности  $D_0$ , будут 5-го порядка, и прямая, соединяющая их, параллельна оси  $x$ , т. е. соблюдается условие (B)  $W_{2x} = 0$ . Тогда координаты обеих точек должны удовлетворять уравнению (4), что возможно только при

$$3W_0 A_3 - W_{1y} a_2 = 0, \quad 3W_0 B_3 - W_{1y} b_2 = 0.$$

Из последнего равенства имеем  $B_3 = 0$ , и равенство (3) обращается в тождество: обе точки оси  $y$  будут 5-го порядка.

**Теорема II.** Если две точки Бурместра, лежащие на окружности  $D_0$ — 5-го порядка и линия их соединяющая параллельна оси  $x$ , то и две другие точки, лежащие на оси  $y$ , также будут 5-го порядка.

Чтобы представить в геометрической форме зависимость между положением двух точек Бурместра на оси  $y$  и двух — на окружности  $D_0$ , перепишем уравнения (3) и (4) таким образом:

$$\frac{B_2 - b_1}{W_0 c_1} y^2 - \left( \frac{1}{M_0} + \frac{1}{W_0} \right) y + 1 = 0 \quad (5)$$

и

$$\frac{x}{L} + \frac{y}{M} = 1, \quad (6)$$

где положено

$$\frac{A_2}{W_0 W_{1y}} = \frac{1}{L}, \quad \frac{B_2}{W_0 W_{1y}} = \frac{1}{M} - \frac{1}{M_0}. \quad (7)$$

На основании последнего равенства

$$\frac{B_2 - b_1}{W_0 c_1} = \frac{W_{1y}}{c_1} \left( \frac{1}{M} - \frac{1}{M_0} \right) + \frac{1}{W_0 M_0} = \frac{1}{M D_0} - \frac{1}{M \Delta_0}$$

и, следовательно, (5) может быть представлено в виде

$$\left( \frac{1}{M D_0} - \frac{1}{M_0 \Delta_0} \right) y^2 - \left( \frac{1}{M_0} + \frac{1}{W_0} \right) y + 1 = 0. \quad (8)$$

Предположим, что нам даны  $D_0$  и  $\Delta_0$  и известны  $M_0$  и  $W_0$ . Если мы будем менять положение точки  $W_2$ , то  $A_2$ ,  $B_2$  будут меняться, будет меняться и положение точек  $Y_1$  и  $Y_2$  Бурместра на оси  $y$  и положение прямой (6), соединяющей две другие точки Бурместра, расположенные на окружности  $D_0$ .

Из уравнений (7) и (8) мы усматриваем, что как точки  $Y_1$ ,  $Y_2$ , так и отрезок  $M$ , отсекаемый прямой (7) на оси  $y$ , зависят только от ординаты  $W_{2y}$ , а отрезок  $L$ , отсекаемый той же прямой на оси  $x$  — только от абсциссы  $W_{2x}$ .

Так как ординаты точек  $Y_1$  и  $Y_2$  суть корни уравнения (8), то

$$\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} = \frac{1}{M_0} + \frac{1}{W_0}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{Y_1} \cdot \frac{1}{Y_2} = \frac{1}{M_0 D_0} - \frac{1}{M \Delta_0}. \quad (10)$$

Первое уравнение показывает, что пары точек Бурместра на оси  $y$ , соответствующие различным значениям  $W_{2y}$ , образуют инволюцию. Чтобы эту инволюцию построить и связать значения  $Y_1$ ,  $Y_2$  с величиной  $M$  и точкой  $M$  на оси  $y$ , мы спроектируем точки  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $M$  на окружность  $\Pi$  произвольного диаметра  $\Pi$ , касающуюся оси  $y$  в начале координат, из точки  $\Pi$ , находящейся в конце диаметра, лежащего на оси  $x$ , противоположном началу координат. Мы обозначим проекции этих точек соответственно через  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $m$ , теми же буквами обозначим

и угловые коэффициенты радиусов-векторов, проведенных к ним из начала. Тогда  $\Pi = Y_1 y_1$ ,  $\Pi = Y_2 y_2$ , и уравнения (9) и (10) можно переписать таким образом:

$$\frac{y_1 + y_2}{\Pi} = \frac{1}{M_0} + \frac{1}{W_0}, \quad (11)$$

$$\frac{y_1 y_2}{\Pi^2} = \frac{1}{M_0 D_0} - \frac{1}{M \Delta_0}. \quad (12)$$

На основании уравнения (8) § 26 точки  $y_1 y_2$  образуют на окружности  $\Pi$  инволюцию, и центром ее должна быть точка  $E$ , лежащая на оси  $y$ . Чтобы найти точку  $E$ , достаточно построить на окружности  $\Pi$  две соответствующие точки  $y_1$  и  $y_2$  и соединить их прямой; эта последняя и пересечет ось  $y$  в точке  $E$ . Замечая, что по уравнению (9) при  $Y_1 = M_0$ ,  $Y_2 = W_0$  и при  $Y_1 = \Delta_0$ ,  $Y_2 = D_0/3$ , мы можем для определения точки  $E$  воспользоваться или парой  $W_0$ ,  $M_0$  или парой  $\Delta_0$ ,  $D_0/3$ , спроектировав их на окружность  $\Pi$  из точки  $\Pi$ .

Всякая прямая, проведенная через точку  $E$ , пересечет окружность  $H$  в двух соответствующих точках  $y_1$ ,  $y_2$ ; проектируя из точки  $\Pi$  на ось  $y$ , получим пару точек  $Y_1$ ,  $Y_2$ .

Чтобы построить соответствующее положение точки  $M$ , продолжим прямую  $Ey_1 y_2$  до пересечения с осью  $x$  в точке  $l$ , абсцисса которой по формуле (6) §. 26 будет:

$$l = \frac{\Pi}{1 - y_1 y_2}.$$

Исключая из этого уравнения и уравнения (12) произведение  $y_1 y_2$ , получим.

$$\frac{\Delta_0}{l} - \frac{\Pi}{M} = \frac{\Delta_0}{D_0} \left( \frac{D_0}{\Pi} - \frac{\Pi}{M_0} \right) = N_0$$

или

$$\frac{\Delta_0}{N_0} \cdot \frac{1}{l} - \frac{\Pi}{N_0} \cdot \frac{1}{M} = 1.$$

Так как  $D_0$ ,  $\Delta_0$ ,  $\Pi$ ,  $M_0$  и  $N_0$  суть по предположению величины постоянные то из этого уравнения следует, что прямая  $lM$  всегда будет проходить через одну и ту же точку

$$F \left( \frac{\Delta_0}{N_0}, -\frac{\Pi}{N_0} \right)$$

какова бы ни была пара  $Y_1$ ,  $Y_2$  и соответствующая ей точка  $M$ .

Построить точку  $F$  мы легко можем, замечая, во-первых, что прямая  $OF$  проходит через точку  $K$  ( $\Delta_0$ ,  $-\Pi$ ) и, во-вторых, что при  $Y_1 = M$ ,  $Y_2 = W_0$  из уравнения (10) мы имеем  $M = M_0$ . Если поэтому мы спроектируем точки  $M$  и  $W_0$  на окружность  $\Pi$  в точки  $w_0$ ,  $h_0$ , продолжим прямую  $w_0 h_0$  до пересечения с осью  $x$  в точке  $l_0$ , то прямая  $l_0 M_0$  должна пройти через точку  $F$ . Эта последняя, следовательно, определится пересечением прямых  $OK$  и  $l_0 M_0$ .

Определение точки  $F$  становится проще, если мы диаметр  $\Pi$  возьмем не произвольно, а положим

$$\Pi = \frac{D_0}{\sqrt{2}} = \frac{D_0}{2} \sqrt{2},$$

т. е. стороне квадрата, вписанного в окружность  $D_0$ . Тогда  $N_0 = -\sqrt{2}$ , и координаты точки  $F$  будут:

$$-\frac{\Delta_0}{2}\sqrt{2}, \quad \frac{D_0}{2},$$

т. е. абсцисса будет по абсолютной величине равняться стороне квадрата, вписанного в окружность  $\Delta_0$ , а ордината — радиусу окружности  $D_0$ .

Имея точки  $E$  и  $F$ , мы легко, как сказано выше, построим две из точек  $Y_1, Y_2, M$ , когда известна одна из них. Прямая  $ML$  (6), проведенная через точку  $M$ , пересечет окружность  $D_0$  в двух других точках  $A$  и  $B$  Бурместра. Соответствующие этим последним центры кривизны мы получим, проектируя их из начала  $O$  на окружность  $\Delta_0$  в точки  $\Lambda$  и  $\mathcal{B}$ . Центры же кривизны, соответствующие точкам  $Y_1$  и  $Y_2$ , можно найти при помощи точки  $W_0$  построением, о котором говорилось в § 13.

Если  $Y_1 = W_0$ , то  $Y_2 = M_0$  и  $M = M_0$ , т. е. если существует точка Чебышева, то три другие точки Бурместра  $A, B, M_0$  лежат на одной прямой в точках пересечения ее с окружностью  $D_0$  и осью  $y$ .

Если притом точки  $A$  и  $B$  будут 5-го порядка и прямая  $ABM_0$  — параллельна оси  $x$ , то по теореме II точки  $M_0$  и  $W_0$  будут также 5-го порядка.

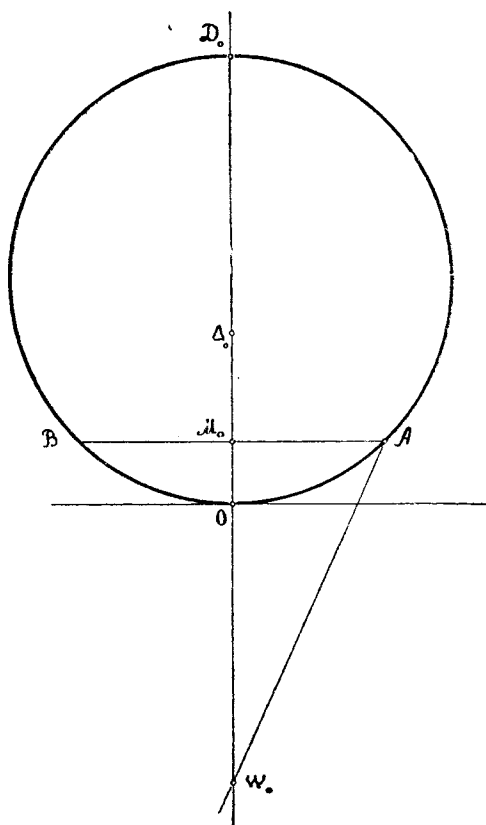
Шарнирный четырехугольник  $A, B, \Lambda, \mathcal{B}$  с неподвижным звеном  $AB$  будет представлять собой параллелограмм Чебышева, доставляющий точке  $W_0$  прямолинейное движение с точностью до величин 5-го порядка, если он не симметричен относительно оси  $y$  и прямая  $AB$  не параллельна оси  $x$ , и с точностью до величин 6-го порядка, если он симметричен относительно оси  $y$  и линия  $AB$  параллельна оси  $x$ .

Для шарнирного четырехугольника  $ABAB$ , симметричного относительно оси  $y$ , нетрудно получить формулы П. Л. Чебышева. Проведем через  $M_0$  линию, параллельную оси  $x$ , до пересечения с окружностью  $D_0$  в точках  $A$  и  $B$  и обозначим через  $\varphi$  полярный угол точки  $A$ . Из чертежа (фиг. 52) мы имеем:

$$M_0 = D_0 \sin^2 \varphi$$

и по формулам (1) и (3) § 18

$$\frac{1}{W_0} = \frac{2}{D_0} - \frac{1}{2M_0}, \quad \frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{2M_0} - \frac{1}{D_0}$$



Фиг. 52.

получаем:

$$\begin{aligned} W_0 &= -\frac{2D_0 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\cos 3\varphi}, \\ \Delta_0 &= \frac{2D_0 \sin^2 \varphi}{\cos 2\varphi}, \\ M_0 - W_0 &= D_0 \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tg} 3\varphi, \\ D_0 - \Delta_0 &= D_0 \frac{\cos 3\varphi}{\cos 2\varphi \cos \varphi}, \\ M_0 A &= D_0 \sin \varphi \cos \varphi, \\ W_0 A &= \sqrt{M_0 A^2 + M_0 W_0^2} = D_0 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos 3\varphi}. \end{aligned}$$

Радиус кривизны, соответствующий точке  $A$ ,

$$R = (D_0 - \Delta_0) \sin \varphi = D_0 \frac{\cos 3\varphi}{\cos 2\varphi} \operatorname{tg} \varphi$$

и затем

$$\frac{M_0 A}{R} = \frac{\cos^2 \varphi \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi}, \quad (13)$$

$$\frac{M_0 W_0}{R} = \frac{\cos^2 \varphi \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} \operatorname{tg} 3\varphi, \quad (14)$$

$$\frac{M_0 W_0}{M_0 A} = \operatorname{tg} 3\varphi = \operatorname{tg} (M_0 A W_0). \quad (15)$$

Последние три формулы принадлежат П. Л. Чебышеву <sup>1)</sup>.

Из (15) следует равенство

$$M_0 A W_0 = 3\varphi = 3M_0 A O,$$

представляющее собой частный случай теоремы V § 41.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

**Случай 1.** Если  $W_{1y} = 0$ , то

$$D_0 = W_0, \quad \Delta_0 = \infty, \quad M_0 = \frac{W_0}{2}.$$

В этом случае строфонда  $S$  состоит из оси  $y$  и круга перегиба, а строфонда  $\Sigma$  — из координатных осей  $x$  и  $y$ .

Положение точек Бурместра на оси  $y$  будет определяться уравнением (1), которое теперь принимает вид:

$$B_2 y^2 + 3W_0(y - W_0)(2y - W_0) = 0.$$

<sup>1)</sup> „О параллелограммах, состоящих из трех элементов и симметрических около оси“. Сочинения, т. II, стр. 294. „О параллелограммах, состоящих из трех каких-либо элементов“. Сочинения, т. II, стр. 302.

Окружность  $D_0$ , образующая часть строфоиды  $S$ , совпадает с кругом перегиба  $W_0$ , и потому все точки окружности  $D_0$  будут точками Валла. Те из них будут точками Бурместра, в которых окружность  $D_0$  пересечется с прямой (2), обращаемой при  $W_{1y} = 0$  в прямую

$$A_2x + B_2y = 0,$$

проходящую через начало координат и перпендикулярную к прямой  $W_0W_2$ . Таким образом, одна из точек Бурместра, лежащих на окружности  $D_0$ , совпадает с началом координат (см. теорему II § 25), другая будет точкой Чебышева. Эта последняя будет 5-го порядка, если прямая (13) будет тождественна с (4), т. е.

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{B_2}{B_3}.$$

**Случай 2.** Если  $W_{1y} = \frac{3}{4} W_0$ , то

$$D_0 = \frac{4}{3} W_0, \quad \Delta_0 = -4 W_0, \quad M_0 = W_0.$$

Механизм  $ABVA$  представляет предельный случай механизма Чебышева, доставляющего движение точки по траектории, наименее уклоняющейся от прямой <sup>1)</sup>.

**Случай 3.** Если  $W_{1y} = W_0$ , то

$$D_0 = \frac{3}{2} W_0, \quad \Delta_0 = -3 W_0, \quad M_0 = \frac{3}{2} W_0.$$

Особенность этого случая заключается в том, что  $M_0 = D_0$  и, следовательно, в случае Чебышева, когда  $y_1 = W_0$ ,  $y_2 = M_0 = M = D_0$  и две точки Бурместра, из которых одна находится на оси  $y$ , а другая — на окружности  $D_0$ , совпадают с точкой  $D_0$  (фиг. 53.) Третья точка лежит на оси  $y$  ( $W_0$ ), и четвертая — на окружности  $D_0$ .

**Случай 4.** Если  $W_{1y} = \frac{3}{2} W_0$ , то

$$D_0 = 2 W_0, \quad \Delta_0 = -2 W_0, \quad M_0 = \infty.$$

Особенность этого случая заключается в том, что  $M_0 = \infty$  и, следовательно, когда существует точка Чебышева, которая теперь находится в центре окружности  $D_0$ , другая точка Бурместра, находящаяся на оси  $y$ , удаляется в бесконечность, и две точки, лежащие на окружности  $D_0$ , находятся на прямой параллельной оси  $y$  (фиг. 54).

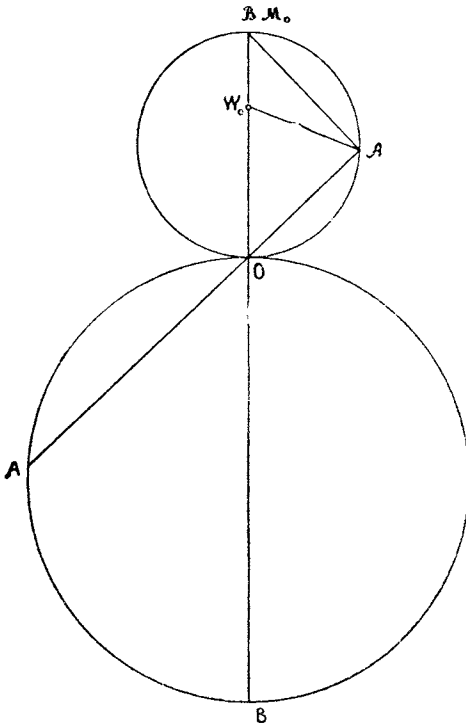
**Случай 5:** Рассмотрим случай, когда

$$\frac{W_0}{\Delta_0} = \frac{M_0}{D_0}. \tag{16}$$

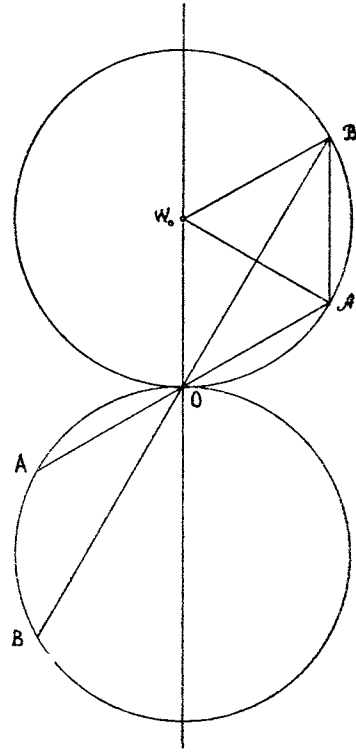
<sup>1)</sup> П. Л. Чебышев. С об одним механизме. Сочинения, т. II, стр. 52.

Из этого условия, принимая во внимание, что

$$\frac{1}{W_0} = \frac{1}{D_0} - \frac{1}{\Delta_0} \quad \text{и} \quad \frac{1}{M_0} = \frac{2}{D_0} + \frac{2}{\Delta_0},$$



Фиг. 53.



Фиг. 54.

мы находим:

$$\Delta_0 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} D_0, \quad W_0 = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8} D_0, \quad M_0 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} D_0$$

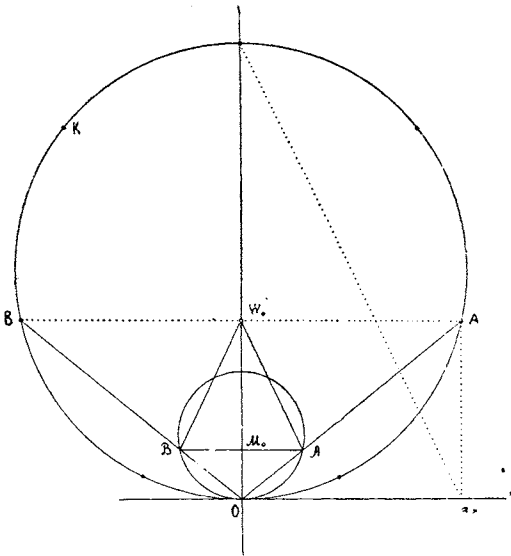
или

$$\begin{aligned} \Delta_{01} &= 3,562 D_0, & \Delta_{02} &= -0,562 D_0, \\ W_{01} &= 1,390 D_0, & W_{02} &= 0,360 D_0, \\ M_{01} &= 0,390 D_0, & M_{02} &= -0,640 D_0. \end{aligned}$$

Мы получаем, таким образом, два решения.

Когда существует точка Чебышева, то точки  $A, B, M_0$  должны лежать на одной прямой и вследствие пропорции (16) точки  $A, B, W_0$  также лежат на одной прямой.

В первом решении (фиг. 55) мы можем построить симметрический параллелограмм, так как точка  $M_0$  находится внутри окружности  $D_0$ . Точка  $W_0$  будет двигаться по прямой, соединяющей неподвижные шарниры  $AB$ . Вы-



Фиг. 55.

числя в этом случае угол  $W_0OA$ , мы получаем с точностью до величин 6-го порядка

$$W_0OA = 51^\circ 19' 55''.$$

Так как

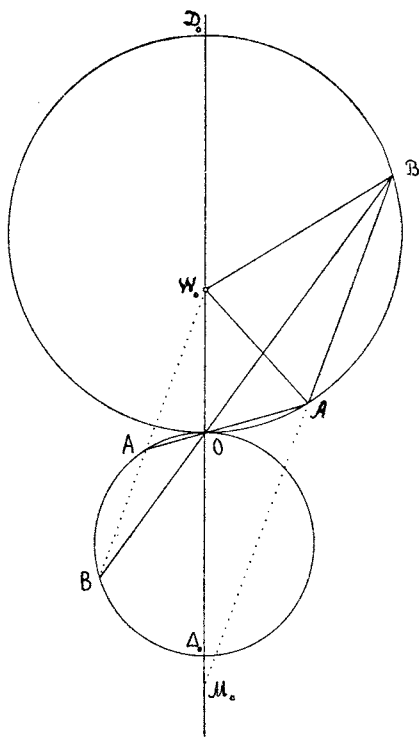
$$\frac{360^\circ}{7} = 51^\circ 25' 43'',$$

то угол  $W_0OA$  почти равняется центральному углу, соответствующему стороне правильного семиугольника, вписанного в окружность, и отличается от него менее чем на  $0,1^\circ$ .

Зная угол  $W_0OA$  — мы можем, задавшись величиной  $\Delta_0$ , построить окружность  $\Delta_0$  и точку  $A$  на ней (она почти совпадает с вершиной семиугольника). Через  $A$  проведем линию, параллельную оси  $x$ , и определим точки  $B$  и  $W_0$ . Чтобы построить точку  $A$ , опустим из  $A$  перпендикуляр  $Aa_x$  на ось  $x$  и через  $W_0$  проведем прямую  $W_0A$  параллельную  $\Delta_0a_x$ ; эта прямая пересечется с  $OA$  в точке  $A$ . Проведем через  $A$  линию, параллельную оси  $x$ , получим точки  $B$  и  $M_0$ . Заметим, что по теореме Чебышева (форм. 15) линия  $AW_0$  будет почти параллельна прямой  $OK$ .

В правильности этого построения мы легко убедимся, рассматривая подобные треугольники  $OM_0A$  и  $OW_0A$  и замечая, что стороны их пропорциональны диаметрам и что  $W_0M_0 = D_0$ .

Во втором решении (фиг. 56) точка  $M_0$  находится вне окружности  $D_0$ , и симметричный параллелограмм будет мнимым. Параллелограмм несимметричный доставляет прямолинейное движение точке  $W_0$  с точностью только до величин 5-го порядка.



Фиг. 56.

**Случай 6.** Если  $W_{1y} = 3W_0$ , то

$$D_0 = \infty, \quad \Delta_0 = -W_0, \quad M_0 = -\frac{W_0}{2}.$$

В этом случае строфоида  $S$  состоит из координатных осей  $x$  и  $y$ , а строфоида  $\Sigma$  — из оси  $y$  и окружности  $\Delta_0$ .

Ординаты точек Бурместра, лежащих на оси  $y$ , будут определяться уравнением, которое теперь принимает вид:

$$B_2y^2 - 3W_0(y - W_0)(2y + W_0) = 0.$$

Две другие точки Бурместра находятся в точках пересечения прямой (2) с окружностью  $D_0$ . Когда  $W_{1y} = 3W_0$ , окружность  $D_0$  обращается в ось  $x$ , и одна из точек Бурместра  $B$  удаляется по прямой (2) в бесконечность, а другая  $A$  находится в точке пересечения прямой (2) с осью  $x$  и имеет абсциссу

$$x = L = \frac{3W_0^2}{W_{2x}}.$$



На основании теоремы I § 25 соответствующий точке  $A$  центр кривизны находится в начале координат.

§ 57. В формулах (2), (3), (4) § 10, на которые опирались все наши исследования, предполагается, что в рассматриваемый нами момент угловая скорость не равна нулю. При  $\omega = 0$  мгновенный центр вращения удаляется в бесконечность, произведения  $\omega x_c$ ,  $\omega y_c$  становятся неопределенными, и пользоваться упомянутыми формулами нельзя. Для этого случая мы должны вывести другие формулы.

Предположим сначала, что  $\omega \neq 0$  и обозначим проекции скорости подвижного начала  $O$  на оси  $x$  и  $y$  через  $u$  и  $v$ ; тогда по известным формулам кинематики мы имеем:

$$v_x = u - \omega y, \quad v_y = v + \omega x.$$

Подставляя эти значения  $v_x$  и  $v_y$  в формулы (2) § 10, мы получаем

$$\begin{aligned} j_x &= u' - \omega v - \omega' y - \omega^2 x, \\ j_y &= v' + \omega u + \omega' x - \omega^2 y, \\ j_{2x} &= u'' - 2\omega v' - \omega' v - \omega^2 u - (\omega'' - \omega^3)y - 3\omega\omega'x, \\ j_{2y} &= v'' + 2\omega u' + \omega' u - \omega^2 v + (\omega'' - \omega^3)x - 3\omega\omega'y, \\ j_{3x} &= u''' - 3\omega v'' - 3\omega' v' - \omega'' v - 3\omega\omega' u - 3\omega^2 u' + \\ &\quad + \omega^3 v - (\omega''' - 6\omega\omega')y - (3\omega'^2 + 4\omega\omega'' - \omega^3)x, \\ j_{3y} &= v''' + 3\omega u'' + 3\omega' u' + \omega'' u - 3\omega\omega' v - 3\omega^2 v' - \omega^3 u + \\ &\quad + (\omega''' - 6\omega\omega')x - (3\omega'^2 + 4\omega\omega'' - \omega^3)y. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что  $\omega = 0$ . Так как нас интересует только свойство траектории точек движущейся плоскости, то мы можем предположить, что  $\omega' = \text{const.}$ ,  $\omega'' = \omega''' = 0$ . Поместим начало  $O$  координат в центре ускорений, так что  $u' = v' = 0$ , и кроме того направим ось  $x$  по скорости точки  $O$ , т. е. будем считать  $v = 0$ . Тогда предыдущие формулы примут такой вид:

$$\begin{aligned} v_x &= u, \quad j_x = -\omega'y, \quad j_{2x} = u'', \quad j_{3x} = u''' - 3\omega'^2 x, \\ v_y &= 0, \quad j_y = \omega'x, \quad j_{2y} = v'' + \omega'u = v_2, \quad j_{3y} = v''' - 3\omega'^2 y. \end{aligned}$$

Подставляя проекции ускорений в уравнения (2), (3), (4), (5) § 14, мы теперь получаем:

$$\begin{aligned} u(x - a) &= 0, \\ -\omega'y(x - a) + \omega'x(y - b) + u^2 &= 0, \\ u''(x - a) + v_2(y - b) - 3u\omega'y &= 0, \\ (u''' - 3\omega'^2 x)(x - a) + (v''' - 3\omega'^2 y)(y - b) + 4uu'' + 3\omega'^2(x^2 + y^2) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = a, \tag{1}$$

$$x(y - b) = -\frac{u^2}{\omega'}, \tag{2}$$

$$v_2(y - b) - 3u\omega'y = 0, \tag{3}$$

$$(v''' - 3\omega'^2 y)(y - b) + 4uu'' + 3\omega'^2(x^2 + y^2) = 0, \tag{4}$$

или, полагая для сокращения

$$-\frac{u^2}{\omega'} = l^2, \quad -\frac{uc_2}{3\omega'^2} = m^2$$

и заменяя в (3) и (4)  $y - b$  через  $l^2/x$ :

$$x = a, \quad y - b = \frac{l^2}{x}, \quad (5)$$

$$xy = m^2, \quad (6)$$

$$(v''' - 3\omega'^2 y)l^2 + 4uv''x + 3\omega'^2 x(x^2 + y^2) = 0. \quad (7)$$

Первые два равенства определяют для каждой точки плоскости  $(x, y)$  соответствующий ей центр кривизны  $(a, b)$ .

Гипербола (6) представляет геометрическое место точек, которым соответствуют круги кривизны, имеющие соприкосновение 3-го порядка. Геометрическое место соответствующих центров кривизны будет также гиперболой, уравнение которой

$$a\left(b + \frac{l^2}{a}\right) = m^2$$

или

$$ab = m^2 - l^2, \quad (8)$$

мы получаем, исключая из уравнения (6)  $x$  и  $y$  при помощи уравнений (5). Обе гиперболы (6) и (8) имеют общий центр и общие асимптоты и различаются только параметрами  $m^2$  и  $m^2 - l^2$ .

Точки, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям (6) и (7), т. е. точки пересечения гиперболы (6) с кривой (7), будут точками Бурместра: им соответствуют круги кривизны, имеющие соприкосновение 4-го порядка.

**Теорема I.** *В тот момент, когда  $\omega = 0$ , обе стробойды  $S$  и  $\Sigma$  обращаются в равнобедренные гиперболы, имеющие общий центр в центре ускорений и общие асимптоты, из которых одна параллельна общей всем точкам скорости. Точки Бурместра определяются пересечением одной из этих гипербол (6) с кривой третьего порядка (7).*

Исключая из уравнения (6) и (7)  $y$ , для определения абсцисс  $x_a, x_b, x_c, x_d$  точек Бурместра  $A, B, C, D$  и соответствующих им центров кривизны  $A, B, \Gamma, \Delta$ , мы получаем уравнения 4-й степени:

$$3\omega'^2 x^4 + 4uv''x^2 + v'''l^2x + 3\omega'^2 m^2(m^2 - l^2) = 0.$$

Отсюда для корней его мы имеем два равенства

$$x_a + x_b + x_c + x_d = 0 \quad (9)$$

$$x_a x_b x_c x_d = m^2(m^2 - l^2). \quad (10)$$

Теорема I и эти равенства дают возможность решить следующие задачи:

**Задача 1.** По двум данным точкам Бурместра  $A, B$  и соответствующим им центрам кривизны  $A, B$  построить гиперболы (6) и (8).

Задача решается на основании того свойства гиперболы, что отрезки секущей прямой, заключенные между гиперболой и асимптотами, равны между собой.

Одна асимптота, ось  $y$ , параллельна прямым  $AA$  и  $BB$ , другая, ось  $x$ , проходит через точку  $E$  (фиг. 57) пересечения прямых  $AB$  и  $AB$  и перпендикулярна к первой. Мы находим центр  $O$  гипербол, определив точки  $A_1$  и  $B_1$  пересечения прямых  $AA$  и  $BB$  с осью  $x$  и отложив по оси  $x$  отрезок  $OA_1 = B_1E$ .

Чтобы построить точки  $C$  и  $\Gamma$  гипербол, соответствующие абсциссе  $x_c$ , берем на оси  $x$  точки  $C_1$  и  $F$ , абсциссы которых соответственно равны  $x_c$  и  $x_c + x_a$ , где  $x_a$  есть абсцисса точек  $A, A_1, A$ . Через  $C_1$  проводим прямую, параллельную оси  $y$ , а  $F$  соединяем прямыми  $AF$  и  $AF$  с точками  $A$  и  $A$ . Точки пересечения этих прямых и будут, на основании упомянутого свойства гипербол, точками  $C$  и  $\Gamma$ .

**Задача 2.** По двум точкам Бурместра  $A, B$  и соответствующим им центрам кривизны  $A, B$  построить две другие точки Бурместра  $C, D$  и центры  $\Gamma, \Delta$  (фиг. 57).

По данным  $AB$  и  $BB$  построим асимптоты гипербол (6) и (8). Пусть  $(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_a, \eta_a), (x_b, \eta_b)$  координаты точек  $A, B, A, B$ . Так как точки  $A$  и  $B$  лежат на гиперболое (6), а точки  $A$  и  $B$  — на гиперболое (8), то

$$\begin{aligned} x_a y_a &= x_b y_b = m^2, \\ x_a \eta_a &= x_b \eta_b = m^2 - l^2. \end{aligned}$$

Сопоставляя эти равенства с (10), имеем

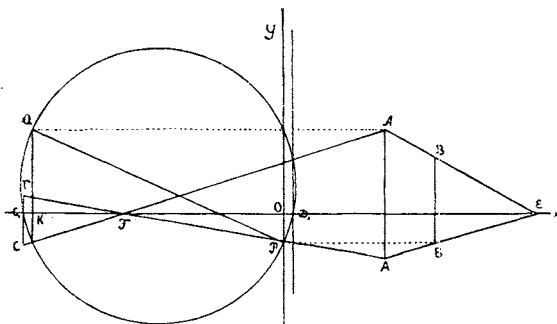
$$x_a y_a x_b \eta_b = x_a x_b x_c x_d$$

или

$$y_a \eta_b = x_c x_d.$$

Кроме того из (9) находим

$$x_c + x_d = -(x_a + x_b).$$



Фиг. 57.

Таким образом абсциссы точек  $C$  и  $D$  будут корнями уравнения

$$x^2 + (x_a + x_b)x + y_a \eta_b = 0. \tag{11}$$

Построить на оси  $x$  точки  $C_1$  и  $D_1$ , абсциссы которых равнялись бы корням этого уравнения, нетрудно.

Через точку  $K(-x_a - x_b, 0)$  проводим ординату  $KQ = y_a$  и на оси  $y$  отложим ординату  $OP = \eta_b$ . На отрезке  $PQ$ , как на диаметре, построим окружность, она пересечет ось  $x$  в точках  $C_1$  и  $D_1$ .

Действительно нетрудно видеть, что

$$x(x + x_a + x_b) + (y - y_a)(y - \eta_b) = 0$$

будет уравнением окружности; положив в нем  $y = 0$ , находим, что абсциссы точек пересечения окружности с осью  $x$  удовлетворяют уравнению (11).

Определив точки  $C_1$  и  $D_1$  по указаниям задачи 1-й, найдем точки  $C, \Gamma$  и  $D, \Delta$ .

Для того чтобы радиус кривизны для одной из точек Бурместра,  $D$ , был бесконечно велик, эта точка должна лежать на асимптоте гиперболы (8),

Поэтому гипербола (6) должна обратиться в совокупность осей  $x, y, m^2 = 0$  и ее уравнение должно распасться на два  $x = 0$  и  $y = 0$ . Полагая в уравнении (7) сначала  $x = 0$ , мы получаем для ординаты  $y_0$  точки  $D$

$$y_0 = \frac{v'''}{3\omega'^2}.$$

Полагая в уравнении (7)  $y = 0$ , получаем для определения абсцисс трех остальных точек Бурместра уравнение 3-й степени

$$3\omega'^2 x^3 + 4m''x + l^2 v''' = 0,$$

откуда

$$x_a + x_b + x_c = 0, \tag{12}$$

$$x_a x_b x_c = -l^2 y_0. \tag{13}$$

**Теорема II.** В случае Чебышева точка Чебышева лежит на одной из асимптот равносторонней гиперболы, а три остальные точки Бурместра — на другой.

**Задача 3.** По двум точкам Бурместра  $A, B$  и соответствующим им центрам кривизны  $A, B$  построить точку Чебышева и третью точку  $C$  и центр  $I$  (фиг. 58).

На основании теоремы точки  $ABAB$  должны быть заданы так, чтобы прямая  $AB$  была перпендикулярна к прямым  $AA$  и  $BB$ .

Построим асимптоты гиперболы (8), на одной из них,  $x$ , будут лежать точки  $A, B$ . Так как точка  $B$  лежит на гиперболы (8) и  $m^2 = 0$ , то

$$x_b \eta_b = -l^2. \tag{14}$$

Исключая  $x_c$  и  $l^2$  из ур. (12), (13), (14), мы будем иметь

$$\frac{x_a}{\eta_b} = -\frac{y_0}{x_a + x_b}.$$

Из этой пропорции следует, что точка  $D$  находится в пересечении прямой  $ED$ , проведенной через точку  $E$  пересечения прямых  $AB$  и  $AB$  перпендикулярно  $AB$ , с осью  $y$ . Действительно, из подобных треугольников  $BVE$  и  $OED$  мы имеем

$$\frac{BE}{BB} = \frac{OD}{OE}$$

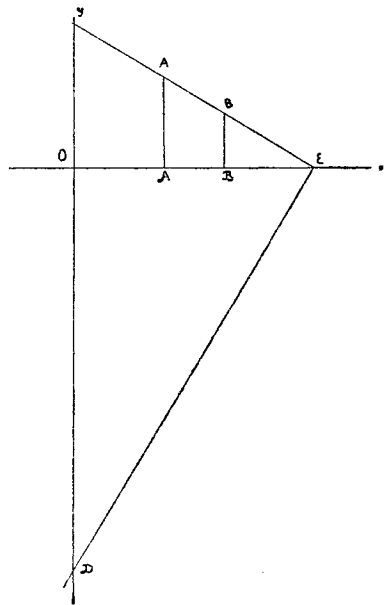
или

$$\frac{x_a}{\eta_b} = \frac{OD}{x_a + x_b},$$

откуда

$$-OD = y_0.$$

Мы построим третью точку Бурместра  $C$  и соответствующий ей центр  $I$  по указаниям задачи 1, замечая, что  $x_c = -(x_a + x_b)$ .



Фиг. 58.

## Les points de Burmester, leurs propriétés et leur construction.

Par M. A. P. Kotelnikoff (Moscou).

(Résumé.)

Le but principal du mémoire est de développer une méthode géométrique uniforme pour l'étude des propriétés et la construction des points de Burmester; la méthode peut s'appliquer au cas général ainsi qu'aux cas particuliers et permet d'unifier les résultats obtenus par P. L. Tschebicheff et R. Müller, en nous laissant en même temps découvrir quelques nouvelles propriétés des points.

Le principe de la méthode est le suivant.

Nous savons que les points de Burmester sont situés sur une certaine strophoïde que nous appellerons  $S$  et que les centres de courbure des trajectoires de ses points se trouvent sur une autre strophoïde  $\Sigma$ . Le centre instantané de rotation  $O$  sert de point double pour les deux strophoïdes, la tangente  $Ox$  et la normale  $Oy$  des roulettes mobile et immobile sont des tangentes communes de  $S$  et de  $\Sigma$  dans leur point double  $O$ . Les branches des strophoïdes  $S$  et  $\Sigma$  qui touchent l'axe  $Oy$  au point  $O$  ont un cercle commun de courbure  $H_0$ ; tandis que les cercles de courbure  $D_0$  et  $\Delta_0$  des deux autres branches des strophoïdes  $S$  et  $\Sigma$  qui touchent l'axe  $Ox$  ont des centres différents.

Construisons une circonférence quelconque  $D$  qui passe par le centre instantané  $O$  et touche l'axe  $Ox$ . Appliquons aux strophoïdes  $S$  et  $\Sigma$  des transformations quadratiques (§§ 7, 30) de manière qu'un point  $A$  de la strophoïde  $S$  et le centre correspondant de courbure  $A$  qui se trouve sur la strophoïde  $\Sigma$  soient transformés en un seul et même point  $a$  de la circonférence  $D$  (l'image des points  $A$  et  $A$ ). La transformation se réduit à la projection des strophoïdes  $S$  et  $\Sigma$  du point  $O$  sur la circonférence  $D$ .

Au moyen de cette construction la figure composée par les points de Burmester sur la strophoïde  $S$  et la figure formée par les centres de courbure correspondants sur la strophoïde  $\Sigma$  se transforment en une seule et même figure de la circonférence  $D$ , et au lieu d'étudier les propriétés des deux premières figures nous pouvons étudier la dernière seulement.

L'avantage de cette méthode est évident, car elle nous permet d'avoir à faire à une figure unique sur une circonférence au lieu des deux figures se trouvant sur des courbes plus compliquées, c'est-à-dire sur des strophoïdes.

Dans le chapitre I en partant de la définition donnée dans le § 4 nous étudions certaines propriétés de la strophoïde, ses diverses constructions (§§ 4, 5, 6) et ses transformations en une droite, une circonférence  $D$  et une parabole ( $v_0$ ) (§§ 7, 8, 30). Nous portons une attention particulière aux propriétés des trois points  $A, B, C$  où la droite  $\sigma$  coupe la strophoïde et leurs images  $a, b, c$  sur la circonférence  $D$  (fig. 6, 7, 16). La droite  $\sigma$  est étroitement liée au triangle  $abc$ , et c'est à l'étude de leurs relations que sont consacrées les §§ 2, 3, ainsi que les §§ 27, 28, 29 et 30. Dans le cas, où la strophoïde est orthogonale, la ligne  $\sigma$  est une ligne de Simpson pour le triangle  $abc$ ; si dans ce cas la ligne  $\sigma$  touche à la parabole ( $v_0$ ), liée de certaine façon à la strophoïde  $S$ , le point d'intersection des hauteurs du triangle  $abc$  se trouve sur le diamètre de la circonférence  $D$  qui passe par le point double  $O$  de la strophoïde (théorème I § 9 et II § 27).

Pour obtenir les équations fondamentales qui déterminent la position des points de Burmester, nous employons dans notre mémoire une méthode qui diffère de la méthode de R. Müller. Nous obtenons d'abord les formules (3, 4, 5 § 10) pour les accélérations des ordres différents des points de la figure plane qui se meut dans son plan en y introduisant les coordonnées des points  $W_0, W_1, \dots$  (centres des accélérations de divers ordres pour la vitesse angulaire  $\omega = \text{const.}$ ). A l'aide de ces formules nous trouvons les conditions nécessaires pour que la circonférence ait avec la trajectoire d'un point un contact de 2, 3, etc. ordre (form. 1', 2', 3', 4', 5' § 14) et nous en tirons les équations des courbes (4'', 5'' § 14) dont l'intersection détermine les points de Burmester. Dans le cas où les cercles de courbure correspondants aux points de Burmester auront un contact avec leur trajectoires au dessus du quatrième ordre, la courbe (6'', § 14) doit passer par les points de Burmester. Le commencement des chapitres II et III est consacré à la déduction de ces formules.

La seconde moitié du chapitre II n'a pas de rapport immédiat au thème principal de notre mémoire. Nous y étudions quelques propriétés des accélérations du 1<sup>er</sup> ordre et nous obtenons la formule de Savary pour le rayon de courbure d'une enveloppe à l'aide d'une méthode qui me paraît être un peu différente des méthodes habituelles employées pour la déduction de cette formule.

Dans la seconde moitié du troisième chapitre, en employant les équations (4'', 5'', 6'' § 14), nous examinons quelques propriétés essentielles des plus simples des points de Burmester.

En partant des équations [4'', 5'', 6'' § 14] et (c) § 20 nous obtenons l'équation (2) § 33 qui détermine les tg des angles polaires des points de Burmester et ensuite les équations (4, 5) § 33 et (3) § 39. Elles servent de base à notre méthode qui consiste, comme nous l'avons dit plus haut, dans la transformation des strophoïdes  $S$  et  $\Sigma$  en une circonférence  $D$ .

Chapitre IV, partie principale du mémoire, est consacré à l'exposition de la méthode; nous examinons d'abord l'involution des points situés sur la circonférence  $D$  (§ 26) et étudions ensuite les propriétés du triangle  $abc$  inscrit dans  $D$  ainsi que la ligne correspondante de Simpson  $\sigma$  (§§ 27, 28, 29, 30).

Les quatre points de Burmester  $A, B, X, Y$ , ainsi que nous l'avons déjà dit, se trouvent sur la strophoïde  $S$ . Prenons sur elle encore six points: le point de Ball,  $T_0$ , les points  $C$  et  $Z$ , où les droites  $AB$  et  $XY$  coupent la strophoïde, les points  $1/c$  et  $1/z$  où les droites qui passent par  $C$  et  $Z$  et sont parallèles à l'asymptote coupent la strophoïde et enfin son point infiniment éloigné. Nous transformons la strophoïde et les dix points énumérés en la circonférence  $D$  et dix points  $a, b, x, y, \tau_0, c, z, 1/c, 1/z, t_0$ .

La propriété principale des figures obtenues de cette façon sur la strophoïde  $S$  et la circonférence  $D$  s'exprime par trois théorèmes suivants.

Traçons à la circonférence  $D$  (fig. 28, 29 § 34) une tangente  $D$  parallèle à l'axe  $Ox$  et déterminons les points  $O_1$  et  $O_0$  où cette tangente et l'axe  $Oy$  sont coupés par la droite  $(-t_0, -\tau_0)$ , tracée par les points  $-t_0, -\tau_0$  symétriques aux points  $t_0, \tau_0$  par rapport à l'axe  $Oy$ . Construisons sur l'axe  $Oy$  et la tangente  $D$  des involutions de points,  $y^2$  et  $D^2$ , de manière que  $O_0$  et  $O_1$  soient leur centres et que les points  $D$  et  $O$  soient des points correspondants pour la première et le point  $D$  soit un point double pour la seconde.

**Théorème I.** (I § 35) *Les trois points  $C, Z, T_0$  sont situés en ligne droite.*

**Théorème II.** (I § 34). *Les points  $C_0, Z_0$ , et  $C_1, Z_1$  (fig. 29) où les droites  $ab$*

et  $xy$  coupent l'axe  $Oy$  et la tangente  $D$  forment des couples de points des involutions  $y^2$  et  $D^2$ .

**Théorème III.** (III § 35) L'axe  $Oy$  est la ligne de Pascal pour l'hexagone

$$t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$$

(fig. 31). Les côtés opposés  $(t_0, 1/c)$  et  $(\tau_0, z)$  se coupent au point  $C_0$  de l'axe  $Oy$ , les côtés opposés  $(t_0, 1/z)$  et  $(\tau_0, c)$  se rencontrent dans le point  $Z_0$  de l'axe  $Oy$  et les côtés opposés  $(c, 1/c)$  et  $(z, 1/z)$  sont parallèles à l'axe  $Oy$ . La droite  $ab$  passe par le point  $C_0$ , la droite  $xy$ —par le point  $Z_0$ .

Dans la seconde moitié du chapitre IV nous faisons des déductions des conséquences tirées de ces théorèmes fondamentaux, nous nous occupons de la solution des différents problèmes de constructions des points de Burmester, donnons une démonstration géométrique de quelques théorèmes de P. L. Tschebicheff (remarque § 40, théorème V, § 41) et R. Müller (théorème IV, § 39) et déduisons une formule de P. L. Tschebicheff (§ 44). Nous portons une attention particulière au cas où un des points de Burmester  $A, B, X, Y$ , par exemple  $Y$ , coïncide avec le point de Ball,  $T_0$ , et les trois autres  $A, B, X \equiv C$  sont situés sur une même droite (§§ 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48). Nous appellerons ce cas le cas de Tschebicheff à l'honneur du grand géomètre qui l'a le premier étudié dans ses mémoires remarquables.

Dans la fin du chapitre IV (§ 52) nous faisons voir comment au moyen du diagramme

$$t_0, 1/c, c, \tau_0, z, 1/z, t_0$$

$$a, b, x, y$$

sur la circonférence  $D$  nous pouvons construire les points de Burmester  $A, B, X, Y$  et les centres de courbure correspondants  $\Lambda, B, \Xi, \Pi$ .

Dans le chapitre V nous examinons le cas où l'une des strophoïdes  $S$  ou  $\Sigma$  ou toutes les deux dégénèrent en une réunion d'une droite et d'une circonférence ou en deux hyperboles équilatères.

(Rec. Math.; XXXIV: 3—4; 1927).